TMA4305 Partielle differensialligninger 2020-12-04

Løsning

Dette er versjon 1 av løsningen. Hvis du finner feil og mangler, så skriv gjerne til `harald.hanche-olsen@ntnu.no`.

Oppgave 1

Ligningen kan også skrives $u_t + u^2 u_x = 0$ (så lenge løsningen er klassisk). Karakteristisk hastighet er u^2. Det betyr at karakteristikken som starter i $x = \xi$ har ligningen $x = \xi + c(\xi)t$, der

$$c(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi < 0, \\ (\xi - 1)^2 & 0 \le \xi \le 1, \\ 0 & \xi > 1. \end{cases}$$

Ligningen kan løses entydig for ξ gitt x og t, så lenge $\partial_\xi x > 0$. Men $\partial_\xi x = 1 + c'(\xi)t$, så dette holder så lenge $c'(\xi)t > -1$. For $0 < \xi < 1$ er $c'(\xi) = 2(\xi - 1)$, som tar alle verdier fra -2 til 0. Løsningen forblir klassisk for $t < \frac{1}{2}$. Når $t = \frac{1}{2}$, begynner karakteristikkene som startet i $\xi = 0$ og de nærmeste til høyre for denne å kollidere, og løsningen utvikler et sjokk.

Vi ser nærmere på $0 \le t \le \frac{1}{2}$: Vi må ha $u = -1$ for $x \le t$, og $u = 0$ for $x \ge 1$. Når $t < x < 1$ skal vi få $0 < \xi < 1$. Vi løser $x = \xi + c(\xi)t$ med hensyn på x Det gir $x = \xi + (\xi - 1)^2 t$, med løsning (etter noe forenkling)

$$\xi = 1 + \frac{1}{2t}\Big(-1 \pm \sqrt{1 - 4t(1 - x)}\Big).$$

Siden $2t < 1$, må vi velge plusstegnet for å få $\xi > 0$. Vi kan så forenkle svaret videre til

$$\xi = 1 - \frac{2(1 - x)}{1 + \sqrt{1 - 4t(1 - x)}},$$

og ender opp med

$$u(t, x) = \begin{cases} -1 & x < t, \\ -\dfrac{2(1 - x)}{1 + \sqrt{1 - 4t(1 - x)}} & t \le x \le 1, \\ 0 & x > 1, \end{cases}$$

der altså $0 \le t \le \frac{1}{2}$.

Oppgave 2

På grunn av kompakthet og kontinuitet, må u oppnå sitt maksimum i et punkt $(t, \boldsymbol{x}) \in [0, T] \times \overline{\Omega}$. Anta at $u(t, \boldsymbol{x}) > 1$. Da kan ikke $(t, \boldsymbol{x})$ ligge på den parabolske randen $\big(\{0\} \times \Omega\big) \cup \big([0, T] \times \partial\Omega\big)$, siden det ville stri mot antagelsene. Dermed er $t \in (0, T]$ og $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Det impliserer $u_t(t, \boldsymbol{x}) \ge 0$ og $\Delta u(t, \boldsymbol{x}) \le 0$, og dermed $u(t, \boldsymbol{x}) - u(t, \boldsymbol{x})^3 \ge 0$ ut fra den gitte PDEen. Men det strir mot antagelsen $u(t, \boldsymbol{x}) > 1$. Altså må $u \le 1$ i hele $[0, T] \times \overline{\Omega}$.

Funksjonen $-u$ oppfyller de samme kravene som er stilt til u, så vi må også ha $-u \le 1$, altså $u \ge -1$.

Denne løsningen lider av en mangel: Vi har benyttet de deriverte av u for $0 < t \le T$, enda u ikke behøver være deriverbar for $t = T$, bare kontinuerlig. Men vi kan gjennomføre argumentet på $[0, T']$ istedet, der $0 < T' < T$, og så la $T' \to T$.

Oppgave 3

La $0 < r < \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \partial\Omega)$, og la $\boldsymbol{\mu}$ være en vilkårlig enhetsvektor. Så er $\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla u$ harmonisk. Vi benytter ball-versjonen av middelverdiegenskapen, etterfulgt av divergensteoremet (merk at $\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla u = \nabla \cdot (u\boldsymbol{\mu})$):

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla u(\boldsymbol{x}) = \frac{n}{A_n r^n} \int_{B_R(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{\mu} \cdot \nabla u(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}^n \boldsymbol{y} = \frac{n}{A_n r^n} \int_{\partial B_R(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\nu} u(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}^n \boldsymbol{y},$$

der $\boldsymbol{\nu}$ er utadrettet enhetsnormal på $\partial B_R(\boldsymbol{x})$. Siden $\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\nu} \le 1$, får vi dermed

$$\left|\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla u(\boldsymbol{x})\right| \le \frac{n}{A_n r^n} \int_{\partial B_R(\boldsymbol{x})} u(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}^n \boldsymbol{y} = \frac{n}{r} u(\boldsymbol{x}),$$

der vi først har benyttet trekantulikheten for integraler sammen med det faktum at $u \ge 0$, og deretter middelverdiegenskapen for u. Siden $\boldsymbol{\mu}$ var en vilkårlig enhetsvektor, må $|\nabla u(\boldsymbol{x})| \le (n/r)u(\boldsymbol{x})$. Nå lar vi $r \to \operatorname{dist} \boldsymbol{x}, \partial\Omega$, og beviset er ferdig.

Alternativt bevis: Med $R = \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \partial\Omega)$, kan vi benytte Harnacks ulikhet i $B_R(\boldsymbol{x})$. Den kan skrives

$$\frac{1-t}{(1+t)^{n-1}} u(\boldsymbol{x}) \le u(\boldsymbol{x} + tR\boldsymbol{y}) \le \frac{1+t}{(1-t)^{n-1}} u(\boldsymbol{x}), \qquad |\boldsymbol{y}| = 1, \quad 0 \le t < 1.$$

Siden de tre uttrykkene har samme verdi i $t = 0$, gjelder samme ulikhet også de deriverte med hensyn på t i $t = 0$. Det gir $-n\,u(\boldsymbol{x}) \le R\boldsymbol{y} \cdot \nabla u(\boldsymbol{x}) \le n\,u(\boldsymbol{x})$. Velg nå $\boldsymbol{y} = \nabla u(\boldsymbol{x})/|\nabla u(\boldsymbol{x})|$, og konkluder med $R\,|\nabla u(\boldsymbol{x})| \le n\,u(\boldsymbol{x})$.

Enda en alternativ løsning går ut på å benytte Poisson-formelen på $B_r(\boldsymbol{x})$ for $0 < r < \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \partial\Omega)$. Poisson-formelen slik vi kjenner den, gjelder på enhetsballen i $\mathbb{R}^n$, så vi må transformere: Sett $w(\boldsymbol{y}) = u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{y})$ for $|\boldsymbol{y}| \le 1$, så er

$$u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{y}) = w(\boldsymbol{y}) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} P_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z}) w(\boldsymbol{z})\, \mathrm{d}S(\boldsymbol{z}), = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} P_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z}) u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{z})\, \mathrm{d}S(\boldsymbol{z}) \qquad \text{der } P_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z}) = \frac{1 - |\boldsymbol{y}|^2}{A_n |\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}|^n},$$

og dermed

$$\nabla u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{r} \nabla v(\boldsymbol{0}) = \frac{1}{r} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \nabla_{\boldsymbol{y}} P_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z}) u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{z})\, \mathrm{d}S(\boldsymbol{z}) \Big|_{\boldsymbol{y}=0} = \frac{n}{rA_n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{z}) \boldsymbol{z}\, \mathrm{d}S(\boldsymbol{z}).$$

Her benytter vi så at $u \ge 0$, og deretter middelverdiegenskapen for uy:

$$\left|\nabla u(\boldsymbol{x})\right| \le \frac{n}{rA_n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{z})\, \mathrm{d}S(\boldsymbol{z}) = \frac{n}{r} u(\boldsymbol{x}),$$

hvorpå vi også her lar $r \to \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \partial\Omega)$ til slutt.

Oppgave 4

La $B = B_r(\boldsymbol{0})$ som foreslått i oppgaven. Da er u kontinuerlig på ∂B, så Poissons integralformel med u som randverdi gir en harmonisk funksjon w på B, kontinuerlig på $\bar{B}$, og lik u på ∂B. Disse kravene definerer w entydig. Men $-w \circ \sigma$ oppfyller de samme kravene, så $w(\sigma\boldsymbol{x}) = -w(\boldsymbol{x})$ for alle $\boldsymbol{x} \in B$.

Del opp B i øvre og nedre halvball: $B^+ = \{\boldsymbol{x} \in B \mid x_n > 0\}$ og $B^- = \{\boldsymbol{x} \in B \mid x_n < 0\}$, og flaten Γ som skiller de to: $\Gamma = \{\boldsymbol{x} \in B \mid x_n = 0\}$. På Γ er $u = w = 0$, på grunn av antisymmetrien til begge funksjonene. Dermed er $u = w$ på hele ∂B^+. Ved entydighetsteoremet for Laplaceligningen, er da $u = w$ på hele B^+. Videre er også $u = w$ på B^-. (Benytt antisymmetrien, eller ta samme argument på B^-). Altså er $u = w$ i hele B, og spesielt er u harmonisk i B, siden w er det. Siden r kunne velges så stor vi vil, er u harmonisk i $\mathbb{R}^n$.

Oppgave 5

a. Anta $\psi_k \to \psi$ i $\mathscr{D}(\mathbb{R}^3)$. Da konvergerer følgen uniformt på de kompakte mengdene B_t og S_t. Det er tilstrekkelig for å konkludere $(b_t, \psi_k) \to (b_t, \psi)$ og $(s_t, \psi_k) \to (s_t, \psi)$.

$(s_t/(4\pi t^2), \psi)$ gir middelverdien av ψ over S_t. Siden hver testfunksjon ψ er kontinuerlig, konvergerer dette mot $\psi(0)$ når $t \to 0$.

Vi kan skrive

$$(b_t, \psi) = \int_0^t \int_{S_\tau} \psi \, \mathrm{d}S \, \mathrm{d}\tau = \int_0^t (s_\tau, \psi) \, \mathrm{d}\tau.$$

Derivasjon med hensyn på t gir svaret (s_t, ψ), så $\partial_t b_t = s_t$.

b. Substituer $\boldsymbol{y} = t\boldsymbol{x}$ der $\boldsymbol{x} \in S_1$ i integralet:

$$(s_t, \psi) = \int_{S_t} \psi(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S(\boldsymbol{y}) = t^2 \int_{S_1} \psi(t\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}S(\boldsymbol{x}).$$

Derivér:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(s_t, \psi) &= 2t \int_{S_1} \psi(t\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}S(\boldsymbol{x}) + t^2 \int_{S_1} \boldsymbol{x} \cdot \nabla\psi(t\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}S(\boldsymbol{x}) \\
&= 2t^{-1}(s_t, \psi) + \int_{S_t} \partial_\nu \psi \, \mathrm{d}S \\
&= 2t^{-1}(s_t, \psi) + \int_{B_t} \Delta\psi \, \mathrm{d}S \\
&= 2t^{-1}(s_t, \psi) + (b_t, \Delta\psi) = (2t^{-1} s_t + \Delta b_t, \psi).
\end{aligned}$$

I andre linje transformerte vi de siste integralet tilbake til S_t, og utnyttet at $\boldsymbol{x}$ er utadrettet enhetsnormal, så $\boldsymbol{x} \cdot \nabla\psi = \partial_\nu \psi$ der ∂_ν står for den normalderiverte. I tredje linje brukte vi divergenssetningen, siden $\Delta\psi = \nabla \cdot \nabla\psi$. I siste linje brukte vi definisjonen av b_t og definisjonen av Δb_t som distribusjon.

c. Vi har $(\Delta b_t, \psi) = (b_t, \Delta\psi)$. Derivasjon med hensyn på t git $(\partial_t b_t, \Delta\psi) = (\Delta\partial_t b_t, \psi)$, som viser at Δb_t er deriverbar med hensyn på t, med derivert $\partial_t \Delta b_t = \Delta\partial_t b_t$.

Produktregelen gir $4\pi \partial_t w_t = -t^{-2} s_t + t^{-1} \partial_t s_t = -t^{-2} s_t + t^{-1}(2t^{-1} s_t + \Delta b_t) = t^{-2} s_t + t^{-1} \Delta b_t$, så $\partial_t w = (4\pi)^{-1}(t^{-2} s_t + t^{-1} \Delta b_t)$.

Vi deriverer en gang til:

$$\begin{aligned}
4\pi \partial_{tt} w &= -2t^{-3} s_t + t^{-2} \partial_t s_t - t^{-2} \Delta b_t + t^{-1} \Delta\partial_t b_t \\
&= -2t^{-3} s_t + t^{-2}(2t^{-1} s_t + \Delta b_t) - t^{-2} \Delta b_t + t^{-1} \Delta s_t \\
&= 4\pi \Delta w_t.
\end{aligned}$$

Fortsetter neste side …

d. Vi finner (detaljert forklaring nedenfor)

$$
\begin{aligned}
(\partial_{tt} w, \psi) = (w, \partial_{tt}\psi) &= \int_0^\infty (w_t, \partial_{tt}\psi_t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\lim_{t\to 0}(w_t, \partial_t\psi_t) - \int_0^\infty (\partial_t w_t, \partial_t\psi_t)\,\mathrm{d}t && (1)\\
&= \lim_{t\to 0}(\partial_t w_t, \psi_t) + \int_0^\infty (\partial_{tt} w_t, \psi_t)\,\mathrm{d}t && (2)\\
&= (\delta, \psi_0) + \int_0^\infty (\Delta w_t, \psi_t)\,\mathrm{d}t && (3)\\
&= (\delta, \psi) + \int_0^\infty (w_t, \Delta\psi_t)\,\mathrm{d}t \\
&= (\delta, \psi) + (w, \Delta\psi) = (\delta, \psi) + (\Delta w, \psi),
\end{aligned}
$$

så $\partial_{tt} w - \Delta w = \delta$.

Første linje er bare definisjonene av distribusjonsderivert og w.

I (1) og (2) har vi gjort to delvisintegrasjoner, basert på produktreglene

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(w_t, \partial_t\psi_t) &= (\partial_t w_t, \partial_t\psi_t) + (w_t, \partial_{tt}\psi_t),\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\partial_t w_t, \psi_t) &= (\partial_{tt} w_t, \psi_t) + (\partial_t w_t, \partial_t\psi_t).
\end{aligned}
$$

Grensen i (1) blir null fordi $w_t = t(4\pi t^2)^{-1} s_t$, og $(4\pi t^2)^{-1} s_t \to \delta$.

Grensen i (2) blir (δ, ψ_0) fordi $\partial_t w_t$ er en sum av to ledd, $(4\pi t^2)^{-1} s_t \to \delta$, og $(4\pi t)^{-1}\,\Delta b_t \to 0$. Den siste grensen gjelder fordi $\left(\frac{4}{3}\pi t^3\right)^{-1} b_t \to \delta$, så $\left(\frac{4}{3}\pi t^3\right)^{-1}\Delta b_t \to \Delta\delta$. (Den nøyaktige grensen er ikke viktig for våre formål, bare det at den eksisterer.)

Pass på δ i utregningen. Den står for to forskjellige distribusjoner: I (3) er $\delta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3)$. Men vi anvender den på ψ_0, med resultat $\psi(0, \mathbf{0})$. Derfor bruker vi $\delta \in \mathscr{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ i de etterfølgende linjene.