TMA4305 2020-10-28

Diagonalargumentet og kompakthet

Følger og delfølger

En *følge* i X er en indeksert familie $(x_i)_{i\in I}$ der I (*indeksmengden*) er en uendelig delmengde av $\mathbb{N}$, og $x_i \in X$ for alle $i \in I$.
(Dette er egentlig bare en annen notasjon for en funksjon $I \to X$, der vi skriver x_i i stedet for $x(i)$.)

Gitt en følge $(x_i)_{i\in I}$, kan vi danne en *delfølge* $(x_i)_{i\in J}$ ved å la J være en uendelig delmengde av I.

En følge $(x_i)_{i\in \mathbb{N}}$ kalles en *full* følge. Tradisjonelle fremstillinger har bare fulle følger (og gir dem ikke noe spesielt navn). Men prisen for å bare bruke fulle følger er høy: Når man tar delfølger, må man omnummerere delfølgen. Dette gir komplisert notasjon, særlig når man gjør det uendelig ofte.

Diagonalargumenter

Eksempel: La H være et Hilbertrom med en ortonormal basis $e_1, e_2, \dots$

$$K = \{ x \in H \mid |\langle x, e_n \rangle| \leq \tfrac{1}{n} \text{ for } n = 1, 2, \dots \}$$

Påstand: En følge $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ i K har en konvergent delfølge.

Bevis: Følgen $(\langle x_j, e_1 \rangle)_{j \in \mathbb{N}}$ er en begrenset følge i $\mathbb{R}$, så den har en konvergent delfølge ved Bolzano–Weierstraß. La oss si $(\langle x_j, e_1 \rangle)_{j \in J_1}$. Vi skriver det slik:

$$\lim_{\substack{j \to \infty \\ j \in J_1}} \langle x_j, e_1 \rangle = c_1$$

Nå er $(\langle x_j, e_2 \rangle)_{j \in J_1}$ også begrenset, så vi finner en konvergent delfølge igjen:

$$\lim_{\substack{j \to \infty \\ j \in J_2}} \langle x_j, e_2 \rangle = c_2 \qquad (J_2 \subseteq J_1)$$

Slik fortsetter vi, og ender med $J_1 \supseteq J_2 \supseteq J_3 \supseteq \cdots$ og

$$\lim_{\substack{j \to \infty \\ j \in J_n}} \langle x_j, e_n \rangle = c_n \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Merk også at $|c_n| \leq \frac{1}{n}$ for alle n.

Nå kommer vi til kjernen i argumentet:

Vi skal lage en ny indeksmengde J_* som nesten er inneholdt i J_n for alle n.
(Det er godt mulig at snittet av alle J_n er tomt, derfor "nesten" ...)

La j_1 være minste indeks i J_1.
La så j_2 være minste indeks i $J_2 \setminus \{j_1\}$
...
La j_n være minste indeks i $J_n \setminus \{j_1, \dots, j_{n-1}\}$
...
og la $J_* = \{j_1, j_2, \dots\}$.

Det følger av konstruksjonen at $j_1 < j_2 < j_3 < \cdots$.
Og J_* er <u>nesten</u> inneholdt i J_n for hver n:

$$J_* \setminus \{j_1, \dots, j_{n-1}\} = \{j_n, j_{n+1}, \dots\} \subseteq J_n$$

Videre er $\lim_{\substack{j \to \infty \\ j \in J_*}} \langle x_j, e_n \rangle = c_n$ for alle n

La nå $x_* = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$.

Rekken konvergerer, fordi $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$

og (e_n) er ortonormal.

La $\varepsilon > 0$. Velg N slik at $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \varepsilon^2$, og

deretter M slik at om $j \in J_*$, $j \ge M$ så er

$$|\langle x_j, e_n \rangle - c_j|^2 < \frac{\varepsilon^2}{N} \quad \text{for } n = 1, \dots, N.$$

Dersom $j \in J_*$, $j \geq M$ så er

$$\|x_j - x_*\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_j, e_n\rangle - c_n|^2$$

$$< N \cdot \frac{\varepsilon^2}{N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \leq 5\varepsilon^2$$

fordi $|\langle x_j, e_n\rangle - c_n|$
$\leq |\langle x_j, e_n\rangle| + |c_n| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$

m.a.o., $\|x_j - x_*\| \leq \sqrt{5}\,\varepsilon$. Dette vise $x_j \to x_*$. $\square$

Om vi sjekker beviset nøyare,
ser vi at A bare trenger disse egenskapene:

- A er begrenset, og
- $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = 0$ uniformt mhp $x \in A$

Den siste grensen gjelder selvsagt for alle $x \in H$,
men med uniformt mener vi:

- For hver $\varepsilon > 0$ finnes N slik at $\sum_{n=N}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 < \varepsilon$
  for alle $x \in A$.

Poenget er altså at samme N virker for alle x
på en gang.

Eksempel: Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} b_n |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq M$

for alle $x \in A$, der M og b_n er konstanter,

$$0 < b_1 \leq b_2 \leq \cdots \quad \text{og} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

Da er A begrenset:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{b_1} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \frac{M}{b_1},$$

og vi får også det andre kriteriet på samme vis:

$$\sum_{n=N}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{b_n}{b_N} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \frac{M}{b_N}$$

der M/b_n er uavhengig av $x \in A$, og $\lim_{N\to\infty} M/b_n = 0$.

Eksemplet er direkte anvendbart i beviset for Rellichs teorem.