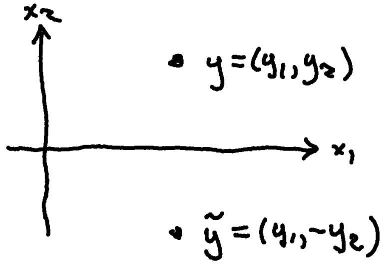
TMA4305 2020: Øving for uke 47

B 12.3 Husk fundamentalløsninga i $\mathbb{R}^2$:

(a)

$$\Phi(x) = \frac{-\ln r}{2\pi} = -\frac{\ln\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{2\pi} = -\frac{1}{4\pi}\ln\left(x_1^2+x_2^2\right)$$



Greens funksjon i $\mathbb{H}^2$ blir

$$G_y(x) = \Phi(y-x) - \underbrace{\Phi(\tilde{y}-x)}_{\substack{\text{harmonisk} \\ \text{i } \mathbb{H}^2 \\ \text{lik } \Phi(y-x) \\ \text{når } x_2=0}}$$

skrevet fullt ut:

$$G_y(x) = -\frac{1}{4\pi}\left(\ln\left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\right) - \ln\left((x_1-y_1)^2+(x_2+y_2)^2\right)\right)$$

Løsningen av $-\Delta u = 0$ i $\mathbb{H}^2$, $u(x_1,0)=g(x_1)$ bør bli:

$$u(y) = -\int_{\partial\mathbb{H}} \partial_\nu G_y \, g \, dS = \int \partial_{x_2} G_y(x,0)\, g(x)\, dx$$

(fordi $\partial_\nu = -\partial_{x_2}$)

$$\partial_{x_2} G_y(x,0) = -\frac{1}{4\pi}\frac{-4y_2}{(x-y_1)^2+y_2^2} = \frac{1}{\pi}\frac{y_2}{(x-y_1)^2+y_2^2} = P_{y_2}(x-y_1)$$

der $\boxed{P_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}}$ er Poisson-kjernen for $\mathbb{H}^2$

(helt analogt med Poissonkjernen for $\mathbb{D}$)

Merk at $P_y(x) > 0$, og $\int_{\mathbb{R}} P_y(x)\,dx = \frac{y}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{dx}{x^2+y^2}$

$$= \frac{y^2}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{dt}{(t^2+1)y^2} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{dt}{1+t^2} = 1$$

$x = yt$
$dx = y\,dt$

(b) Løsningsformelen blir $u(y) = P_{y_2} * g\,(y_1)$

Fordi $P_y(x) = \frac{1}{y} P_1\left(\frac{x}{y}\right)$ og $\int_{\mathbb{R}} P_1 \, dx = 1$, er

$\lim_{y \downarrow 0} P_y = \delta$ i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, slik at $\lim_{y_2 \downarrow 0} u(y) = \delta * g(y_1) = g(y_1)$

(I hvert fall for $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, men det er lett nok å utvide dette til $g \in C_b(\mathbb{R}) := C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.)

10.1 Jeg skriver like gjerne $xu'(x)=1$.

(a) I distribusjonsforstand: $(xu',\varphi)=(1,\varphi)$

kan skrives $(u',x\varphi)=(1,\varphi)$

altså $-(u,(x\varphi)')=(1,\varphi)$

Som integral: $-\int_{\mathbb{R}} u(x)(x\varphi(x))'\,dx=\int_{\mathbb{R}}\varphi\,dx$

Om $u\in\mathcal{D}'$ og $\varphi\in C^\infty$
så er $\varphi u\in\mathcal{D}'$
definert ved
$(\varphi u,\psi)=(u,\varphi\psi)$

(b) $u=\ln|x|$ er lokalt integrabel fordi det ubestemte integralet er $x\ln|x|-x$ som er kontinuerlig i 0 (om du setter verdien i 0 lik 0).

$-\int_{\mathbb{R}}\ln|x|(x\varphi(x))'\,dx$ kan deles i to:

$$-\int_{-\infty}^{0}\ln|x|(x\varphi(x))'\,dx=-\underbrace{\lim_{\varepsilon\searrow 0}\ln\varepsilon\cdot(-\varepsilon\varphi(\varepsilon))}_{=0}+\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x}\cdot x\varphi(x)\,dx$$

fordi $\varepsilon\ln\varepsilon\to 0$ og φ er begrenset

$$=\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,dx$$

$-\int_{0}^{\infty}\ln|x|(x\varphi(x))'\,dx=\int_{0}^{\infty}\varphi(x)\,dx$ av samme grunn.

Så $-\int_{\mathbb{R}}\ln|x|\cdot(x\varphi(x))'\,dx=\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dx$.

10.7 $u \in C^2(\bar{\Omega})$ og $f \in C(\bar{\Omega})$; anta

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi - f\varphi)\, d^n x = 0 \qquad \text{for alle } \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}).$$

Fordi $\nabla \cdot (\varphi \nabla u) = \varphi \Delta u + \nabla \varphi \cdot \nabla u$, er

$$\int_\Omega (\varphi \Delta u + \nabla u \cdot \nabla \varphi)\, d^n x = \int_{\partial\Omega} \varphi\, \partial_\nu u\, dS \quad \text{(Greens 1. identitet)}$$

Kombinasjonen av de to gir

$$\int_\Omega (-\Delta u - f)\varphi\, d^n x = -\int_{\partial\Omega} \varphi\, \partial_\nu u\, dS$$

Spesielt er $\int_\Omega (-\Delta u - f)\varphi\, d^n x = 0$ for $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,

så $-\Delta u = f$. Men så blir $\int_{\partial\Omega} \varphi\, \partial_\nu u\, dS = 0$

for alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, så $\partial_\nu u = 0$.