TMA4305 2020: Øving for uke 46

11.5 $-\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$, $\varphi_\pm = (\pm\varphi_1)\vee 0$

(a) Om $\varphi_1(x)\geq 0$ er $\varphi_+(x)=\varphi_1(x)$, $\varphi_-(x)=0$, $|\varphi_1(x)|=\varphi_+(x)$
Om $\varphi_1(x)\leq 0$ er $\varphi_+(x)=0$, $\varphi_-(x)=-\varphi_1(x)$, $|\varphi_1(x)|=\varphi_-(x)$
I begge tilfelle er $\varphi_\pm(x)\geq 0$, $\varphi_+(x)\varphi_-(x)=0$ og $\varphi_1(x)=\varphi_+(x)-\varphi_-(x)$

(b) Vi tar for gitt at $\varphi_\pm\in H^1_0(\Omega;\mathbb{R})$. Anta $\|\varphi_1\|_2=1$

Fordi $\varphi_+(x)\varphi_-(x)=0$, er $|\varphi_+(x)-\varphi_-(x)|^2=|\varphi_+(x)|^2+|\varphi_-(x)|^2$.
Integrert over Ω får vi da $\|\varphi_1\|_2^2=\|\varphi_+-\varphi_-\|_2^2=\|\varphi_+\|_2^2+\|\varphi_-\|_2^2$.

Vi skulle få $\|\nabla\varphi_+\|_2^2+\|\nabla\varphi_-\|_2^2=\|\nabla\varphi_+-\nabla\varphi_-\|_2^2=\|\nabla\varphi\|_2^2=\lambda_1$
av samme grunn, men i prinsippet kunne vi få
$|\nabla\varphi_+(x)|\cdot|\nabla\varphi_-(x)|$ i punkter der $\varphi_1(x)=0$.
Dette er tricky, og nært relatert til spørsmålet om $\varphi_\pm\in H^1_0$.
Vi lar det ligge. Det er i hvert fall plausibelt!

(c) Vi har $\|\nabla\varphi_\pm\|_2^2\geq\lambda_1\|\varphi_\pm\|$. Legg sammen:

$$\|\nabla\varphi_+\|_2^2+\|\nabla\varphi_-\|_2^2\geq\lambda_1\left(\|\varphi_+\|_2^2+\|\varphi_-\|_2^2\right)=\lambda_1$$

Hvis minst en av ulikhetene $\|\nabla\varphi_\pm\|_2^2\geq\lambda_1\|\varphi_\pm\|$ er
ekte, får vi $\|\nabla\varphi_+\|_2^2+\|\nabla\varphi_-\|_2^2>\lambda_1$, i motstrid med (b).
Så vi må ha likhet, og derfor $-\Delta\varphi_\pm=\lambda_1\varphi_\pm$

(d) Det gir $-\Delta\varphi_\pm\geq 0$, så $\varphi_\pm$ er superharmonisk.
Ved det sterke minimumsprinsippet kan ikke $\varphi_\pm$
ha et minimum i Ω, hvis den ikke er konstant.
Dersom $\varphi_\pm(x)=0$ for en $x\in\Omega$, er x et minimumspunkt,
og da må $\varphi_\pm=0$.
Om $\varphi(x)=0$, er $\varphi_\pm(x)=0$ (for begge valg av $\pm$), så
$\varphi_\pm=0$ og dermed $\varphi=0$. Men $\|\varphi\|_2^2=1$.

(e) Velg en vilkårlig $x \in \Omega$ og sett $c = \frac{q_1(x)}{u(x)}$ [...]

11.6 Når vi skal gjøre en hel serie med Euler-Lagrange-ligninger, er det greit å ha den generelle formelen.

$$S[w] = \int_\Omega L(\nabla w, w, x)\, d^n x \qquad (\text{skriv } p = \nabla w)$$

$$\frac{d}{dt} S[w + t\psi]\Big|_{t=0} = \int_\Omega (\nabla_p L \cdot \nabla\psi + \partial_w L \cdot \psi)\, d^n x$$

$$= \int_{-\Omega} (-\nabla \cdot \nabla_p L + \partial_w L)\, \psi\, d^n x$$

så E-L-lign. blir $\quad -\nabla \cdot \nabla_p L + \partial_w L = 0$.

(a) $\nabla_p = p = \nabla w$, $\partial_w L = a(x) w$: $\quad -\Delta w + a(x) w = 0$

(b) $\partial_{p_k} L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(x) \left([k=i] p_j + [k=j] p_i \right)$

Bytt om på i, j i den ene summen

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (a_{ij} + a_{ji})\, [k=i]\, p_j$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (a_{kj} + a_{jk})\, p_j \qquad \text{Skriv } A = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\nabla_p L = \frac{1}{2}(A + A^T) p = \frac{1}{2}(A + A^T) \nabla w \; : \; -\frac{1}{2} \nabla \cdot (A + A^T) \nabla w = 0.$$

(c) $\nabla_p L = \frac{p}{|p|} = \frac{\nabla x}{|\nabla x|}$: $\quad -\nabla \cdot \frac{\nabla x}{|\nabla x|} = 0$

(d) $\nabla_p L = p = \nabla w$, $\partial_w L = F'(w)$: $\quad -\Delta w + F'(w) = 0$

12.1 Dersom $0<\varepsilon<1$, er

$$(u,\psi)-\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\psi(x)}{x}\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{\psi(x)-\psi(0)}{x}\,dx-\int_{\varepsilon<|x|<1}\frac{\psi(x)}{x}\,dx$$

$$=\underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\psi(x)-\psi(0)}{x}\,dx}_{\substack{\text{integranden har}\\ \text{absoluttverdi}\\ <\|\psi'\|_\infty}}-\underbrace{\int_{\varepsilon<|x|<1}\frac{\psi(0)}{x}\,dx}_{\substack{\text{Dette integralet er null}\\ \text{(antisymmetrisk integrand,}\\ \text{symmetrisk integrasjonsområde)}}}\longrightarrow 0 \text{ når } \varepsilon\to 0$$

12.2 $$(f',\psi)=-(f,\psi')=-\left(\int_{-\infty}^{-1}+\int_{-1}^{0}+\int_{0}^{1}+\int_{1}^{\infty}\right)f(x)\psi'(x)\,dx$$

Gjør delvis integrasjon i hvert delintervall, husk $f'(x)=\frac{1}{|x|}$

$$(f',\psi)=\int_{-\infty}^{-1}\frac{\psi(x)}{|x|}\,dx+f(1)\psi(1)$$

$$+\int_{-1}^{0}\frac{\psi(x)-\psi(0)}{|x|}\,dx+\lim_{\varepsilon\to 0}f(\varepsilon)(\psi(\varepsilon)-\psi(0))-f(-1)(\psi(-1)-\psi(0))$$

$$+\int_{0}^{1}\frac{\psi(x)-\psi(0)}{|x|}\,dx+f(1)(\psi(1)-\psi(0))-\lim_{\varepsilon\to 0}f(\varepsilon)(\psi(\varepsilon)-\psi(0))$$

$$+\int_{1}^{\infty}\frac{\psi(x)}{|x|}\,dx-f(1)(\psi(1)-\psi(0))$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{\psi(x)-\psi(0)}{|x|}\,dx+\int_{|x|>1}\frac{\psi(x)}{|x|}\,dx$$

fordi $f(\pm 1)=0$ og fordi $\psi(\varepsilon)-\psi(0)=O(|\varepsilon|)$ når $\varepsilon\to 0$.

(og $\varepsilon\ln|\varepsilon|\to 0$ når $\varepsilon\to 0$)