TMA4305 2020: Øving for uke 45

Vi kan jobbe med **reelle** funksjoner her: $A \subset H_0^1(\Omega;\mathbb{R})$

11.1 Boken er litt forvirret mhp faktoren $\frac{1}{2}$ i $\mathcal{E}[u]$ og $\mathcal{E}[u,v]$, så jeg unngår den notasjonen her:

$$\boxed{\begin{aligned}\text{Skriv}\quad E_{ij} &= \langle \nabla w_i, \nabla w_j \rangle \\ \text{og}\quad F_{ij} &= \langle w_i, w_j \rangle\end{aligned}}$$

Med $u = \sum_{i=1}^{m} c_i w_i$

så er $\|\nabla u\|_2^2 = \sum_{i,j} c_i c_j E_{ij} = c^T E c$ $\quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$

og $\langle u, f \rangle = \sum_i c_i \langle w_i, f \rangle = c^T g$ $\quad g = \begin{bmatrix} \langle w_1, f \rangle \\ \langle w_2, f \rangle \\ \vdots \\ \langle w_m, f \rangle \end{bmatrix}$

så $\mathcal{D}_f[u] = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \langle u, f \rangle = \frac{1}{2} c^T E c + c^T g$

Dersom $v = \sum b_i w_i$ og $t \in \mathbb{R}$, er

$$\mathcal{D}_f[u+tv] = \frac{1}{2}(c+tb)^T E (c+tb) + (c+tb)^T g$$

$$= \mathcal{D}_f[u] + t\, b^T(Ec+g) + t^2 b^T E b^T$$

Som u minimerer $\mathcal{D}_f$, må $Ec + g = 0$.

Vi kan skrive det som $c = -E^{-1} g$.

E er positiv definit, derfor invertibel.

Dette er utgangspunktet for numeriske Galerkin-metoder.

11.2

(Oppgaven opererer med enhetsballen $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^3$, men bruker senere $\int_{\mathbb{B}} \cdots d^2x$ i (11.64) ... så la oss gjøre det i $\mathbb{R}^n$.
Så vil det vise seg hva som fungerer. SVAR: $n=3$.)

Svak løsning til $r^2 \Delta u = f$ i $\mathbb{B}^3$:

$$\int_{\mathbb{B}} \left(\nabla u \cdot \nabla (r^2 \psi) + f \psi \right) d^n x = 0$$

(a) <u>Klassisk</u> gradient: $\nabla (\ln r) = \frac{\nabla r}{r} = \frac{x}{r^2}$ $(x \in \mathbb{R}^n, r = |x|)$

så er $|\nabla (\ln r)| = \frac{1}{r}$, og $\int_{\mathbb{B}} \frac{1}{r}\, dr = A_n \int_0^1 \frac{1}{r} r^{n-1} dr = \frac{A_n}{n-1} < \infty$

La $\Omega_\varepsilon = \mathbb{B} \setminus \bar{B}_\varepsilon(0)$ og $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{B})$:

$$\int_{\mathbb{B}} u \nabla \psi \, d^n x = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} u \nabla \psi \, d^n x = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(- \int_{\Omega_\varepsilon} \psi \nabla u \, d^n x - \int_{\partial \bar{B}_\varepsilon(0)} u \psi \frac{x}{\varepsilon} dS \right).$$

På $\partial B_\varepsilon(0)$ er ψ begrenset, $u = \ln \varepsilon$, $|\frac{x}{\varepsilon}| = 1$ så randintegralet er $O(\varepsilon^{n-1} \ln \varepsilon) \to 0$ for $n \geq 2$.

Det viser at den klassiske gradienten til u også er en svak gradient.

(Første utgave av boken hadde $n=2$ i denne oppgaven.

Men fordi $|\nabla (\ln r)| = \frac{1}{r}$ og $\int_{\mathbb{B}} \frac{1}{r^2} d^2x = A_n \int_0^1 \frac{1}{r^2} r^{n-1} dr = A_n \int_0^1 r^{n-3} dr$,

er $\ln r \notin H^1(\mathbb{B})$ for $n=2$. Så oppgaven ble gjort om.)

(b) $$\int_{B} \nabla u\cdot\nabla(r^2\varphi)\,d^nx = \int_{B} \frac{x}{r^2}\cdot\left(2x\varphi + r^2\nabla\varphi\right)d^nx$$

$$= \int_{B} \left(2\varphi + x\cdot\nabla\varphi\right)d^nx$$

$$= \int_{B} \left(2 - \nabla\cdot x\right)\varphi\,d^nx$$

$$= \int_{B} (2-n)\,\varphi\,d^nx$$

så u er en svak løsning til $-r^2\Delta u = 2-n$.
Det stemmer overens med oppgaveteksten, med $n=3$.

Spesielt er høyresiden (en konstant) C^∞,
men løsningen er singulær. Ikke engang i H^2_{loc}?

Vel, $\partial_{x_i}u = \frac{x_i}{r^2}$ gir $\partial_{x_j}\partial_{x_i}u = \frac{\delta_{ij}r^2 - 2x_ix_j}{r^4}$

$$\int_{B} |\partial_{x_i}\partial_{x_j}u|^2\,d^nx = \int_{B}\left(\frac{|\delta_{ij}r^2 - 2x_ix_j|}{r^4}\right)^2 d^nx =$$

$$= \int_0^1 A_n r^{n-1} \fint_{\partial B_r(0)} \left(\frac{|\delta_{ij}r^2 - 2x_ix_j|}{r^4}\right)^2 dS\,dr$$

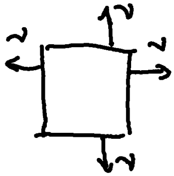
$$= \int_0^1 A_n r^{n-1}\frac{1}{r^4}\underbrace{\fint_{\partial B_1(0)} |\delta_{ij}r^2 - 2x_ix_j|^2\,dS}_{\text{konstant}}\,dr$$

$$= (\text{konstant})\int_0^1 r^{n-5}\,dr = \infty \text{ for } n \le 4$$

så $u \notin H^2$ for $n \le 4$.

X9 Om $\Omega = [0,2\pi]^n$ og $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er 2π-periodisk, er

$$\int_{\mathbb{T}^n} \nabla\cdot F\, d^nx = \int_{\Omega} \nabla\cdot F\, d^nx = \int_{\partial\Omega} \nu\cdot F\, dS$$ ved divergensteoremet.



Bidragene fra motsatte sider på Ω kansellerer fordi F er periodisk og ν er like stor og motsatt rettet ...

Altså divergensteoremet på $\mathbb{T}^n$ er $\int_{\partial\mathbb{T}^n} \nabla\cdot F\, d^nx = 0$

Anvendt på $F = \nabla u$, får vi $\int_{\mathbb{T}} \Delta u\, d^nx = 0$.

Vi finner som vanlig

$$\boxed{\mathcal{D}_f[u] = \int_{\mathbb{T}^n}\left(\tfrac{1}{2}|\nabla u|^2 - uf\right) d^nx = \tfrac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \langle u, f\rangle}$$

$$\mathcal{D}_f[u+tv] = \int_{\mathbb{T}^n}\left(\tfrac{1}{2}|\nabla(u+tv)|^2 - (u+tv)f\right) d^nx$$
$$= \mathcal{D}_f[u] + t\int_{\mathbb{T}^n}(\nabla u\cdot\nabla v - vf)\, d^nx + \tfrac{1}{2}t^2\int_{\mathbb{T}^n}|\nabla v|^2\, d^nx$$

så u minimerer $\mathcal{D}_f \iff \int_{\mathbb{T}^n}(\nabla u\cdot\nabla v - vf)\, d^nx = 0 \quad \forall v \in H^1_\perp$

Men likheten holder også for $v = 1$, siden $\int_{\mathbb{T}^n} f\, d^nx = 0$.

Så u minimerer $\mathcal{D}_f \iff u$ er svak løsning til $-\Delta u = f$.

Løsningen (om den finnes) er entydig, for om $v \in H^1_\perp(\Omega)$ med $v \neq 0$, er $\int_{\mathbb{T}^n} |\nabla v|^2\, d^nx > 0$, så $\mathcal{D}_f[u+v] > \mathcal{D}_f[u]$ etter utregningen ovenfor.

Eksistens:

Vi kommer ikke utenom en Poincaré-ulikhet...
Dersom $u \in H^1(\mathbb{T}^n)$ og

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e^{ik\cdot x}, \quad \text{er} \quad \nabla u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} ikc_k e^{ik\cdot x}$$

$$\|u\|_2^2 = (2\pi)^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \qquad \|\nabla u\|_2^2 = (2\pi)^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |k|^2 |c_k|^2$$

Dersom $u \in H^1_\perp(\mathbb{T}^n)$, er $c_0 = \int_{\mathbb{T}^n} u(x) e^{-i0\cdot x} d^n x = \int_{\mathbb{T}^n} u(x)\,dx = 0$

og for alle $k \neq 0$ er $|k| \geq 1$, så $\boxed{\|u\|_2 \leq \|\nabla u\|_2}$

– og det er ulikheten vi ser etter.

Vi må først vise at $\mathcal{D}_f$ er begrenset nedad:

$$\mathcal{D}_f[u] = \tfrac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \langle f, u\rangle$$ Regner med reelle funksjoner her.

$$\geq \tfrac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \|f\|_2 \cdot \|u\|_2$$

$$\geq \tfrac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \|f\|_2 \cdot \|\nabla u\|_2$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\|\nabla u\|_2 - \|f\|_2\right)^2 - \|f\|_2^2$$

$$\geq -\|f\|_2^2 \, .$$

Så nå setter vi $\mu = \inf_{u \in H^1_\perp(\mathbb{T}^n)} \mathcal{D}_f[u]$

5a

Parallellogram loven:

$$\|\nabla u - \nabla v\|_2^2 = 2\|\nabla u\|_2^2 + 2\|\nabla v\|_2^2 - \|\nabla u + \nabla v\|_2^2$$

trekke fra $\quad 0 = 4\langle u, f\rangle + 4\langle v, f\rangle - 4\langle u+v, f\rangle$

$$\begin{aligned}\|\nabla u - \nabla v\|_2^2 &= 4\mathcal{D}_f[u] + 4\mathcal{D}_f[v] - 8\,\mathcal{D}_f\left[\tfrac{u+v}{2}\right] \\ &\leq 4\mathcal{D}_f[u] + 4\mathcal{D}_f[v] - 8\mu \\ &= 4(\mathcal{D}_f[u] - \mu) + 4(\mathcal{D}_f[v] - \mu)\end{aligned}$$

Fordi vi også har $\|u-v\|_2 \leq \|\nabla u - \nabla v\|$, er

$$\begin{aligned}\|u-v\|_{H^1}^2 &= \|\nabla u - \nabla v\|_2^2 + \|u-v\|_2^2 \\ &\leq 8(\mathcal{D}_f[u] - \mu) + 8(\mathcal{D}_f[v] - \mu)\end{aligned}$$

slik at om $u_j \in H^1_\perp$ er slik at $\mathcal{D}_f[u_j] \to \mu$,

så er (u_j) en Cauchy-følge, og dermed konvergent

i $H^1_\perp(\mathbb{T}^n)$. Siden $\mathcal{D}_f$ er kontinuerlig mhp $\|\cdot\|_{H^1}$,

er $\mathcal{D}_f[\lim u_j] = \mu$, og så er vi ferdig. $\square$