TMA4305 2020: Øving for uke 44

10.4

(a) Første del er bare det enkle faktum at en C^1-funksjon er svakt deriverbar, med svak derivert lik den klassiske deriverte ... og det bygger på delvis integrasjon: F.eks. med $\Omega_\pm = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \pm x_n > 0\}$:

$$\int_{\Omega_\pm} \underset{\uparrow\text{ klassisk derivert}}{\partial_{x_j} f_\pm(x)}\, \varphi(x)\, d^n x = -\int_{\Omega_\pm} f_\pm(x)\, \partial_{x_j}\varphi(x)\, d^n x \quad (\varphi \in C_c^\infty(\Omega_\pm))$$

men dette er også ligningen som definerer den svakt deriverte.

(b) Ligningen over må modifiseres dersom $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\Omega_\pm} \underset{\uparrow\text{ klassisk derivert}}{\partial_{x_j} f_\pm(x)}\, \varphi(x)\, d^n x = -\int_{\Omega_\pm} f_\pm(x)\, \partial_{x_j}\varphi(x)\, d^n x \mp \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_\pm(y,0)\, \varphi(y,0)\, d^{n-1} y$$

fordi $f_\pm \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

(Konvensjonen her er at du konsistent velger det øverste eller nederste fortegnet i $\pm$ og $\mp$.) Summen av de to:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_j} f_\pm(x)\, \varphi(x)\, d^n x = -\int_{\mathbb{R}^n} f_\pm(x)\, \partial_{x_j}\varphi(x)\, d^n x - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \big(f_+(y,0) - f_-(y,0)\big)\, \varphi(y,0)\, d^{n-1} y$$

som er definisjonen av svak derivert hvis og bare hvis det siste integralet er null for alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Takket være Raymond-duBois' lemma er det ekvivalent med at $f_+(y,0) = f_-(y,0)$ for alle $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, dvs at f er kontinuerlig.

10.5 $u(x) = r^{\alpha}$ på $\mathbb{D}$ $\quad (r = |x|)$

(a) $\partial_j u(x) = \partial_{x_j} u(x) = \alpha r^{\alpha-1} \frac{x_j}{r} = \alpha r^{\alpha-2} x_j$ for $r \neq 0$

Lhendig forkortelse

(b) $|\partial_j u(x)| \leq |\alpha| r^{\alpha-1}$ fordi $|x_j| \leq r$ så

$$\int_{\mathbb{D}} |\partial_j u(x)|\, d^2x \leq |\alpha| \pi \int_0^1 r^{\alpha-1} \cdot r\, dr = |\alpha| \pi \int_0^1 r^{\alpha}\, dr < \infty$$

hvis og bare hvis $\alpha > -1$.

Når $\alpha > -1$ og $\psi \in C_c^{\infty}(\mathbb{D})$ er

$$\mathbb{D}_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, |x| < \varepsilon\}$$

$$\int_{\mathbb{D}} \partial_j u(x)\, \psi(x)\, d^2x = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{D} \setminus \overline{\mathbb{D}}_\varepsilon} \partial_j u(x)\, \psi(x)\, d^2x$$

$$= -\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{D} \setminus \overline{\mathbb{D}}_\varepsilon} u(x)\, \partial_j \psi(x)\, d^2x - \int_{\partial \mathbb{D}_\varepsilon} \frac{x_j}{\varepsilon} u(x)\, \psi(x)\, dS$$

$$= -\int_{\mathbb{D}} u(x) \partial_j \psi(x)\, d^2x$$

fordi $u \partial_j \psi \in L^1$ og $\alpha + 1 > 0$

(Randintegralet er $O(\varepsilon^{\alpha+1})$ fordi $\left|\frac{x_j}{\varepsilon}\right| \leq 1$, $u(x) = \varepsilon^{\alpha}$ og randen har lengde $2\pi\varepsilon$.)

Divergensteoremet: $\int_{\Omega} \nabla \cdot f\, d^n x = \int_{\partial\Omega} \nu \cdot f\, dS$
med $f = u\psi e_j$ [e_j er j'te enhetsvektor]
gir $\int_{\Omega} (\partial_j u \cdot \psi + u \partial_j \psi)\, d^n x = \int_{\partial\Omega} \nu_j u \psi\, dS$.

(c) $u \in L^2(\mathbb{D}) \iff \int_{\mathbb{D}} r^{2\alpha}\, d^2x < \infty \iff \int_0^1 r^{2\alpha} \cdot r\, dr < \infty \iff 2\alpha + 1 > -1 \iff \alpha > -1$

$|\nabla u| \in L^2(\mathbb{D}) \overset{*}{\iff} r^{\alpha-2} |(x_1, \ldots, x_n)| \in L^2 \iff r^{\alpha-1} \in L^2(\mathbb{D}) \iff \int_{\mathbb{D}} r^{2(\alpha-1)}\, d^2x < \infty$

$\iff \alpha - 1 > -1 \iff \alpha > 0.$

* Men da har jeg oversett faktoren α, så kriteriet blir $\alpha \geq 0$

X8

(1) Når $\varphi \in C^k$ og $|\alpha| \le k$, er

$$D^\alpha(\varphi * \rho_\delta) = (D^\alpha \varphi) * \rho_\delta \to D^\alpha \varphi \quad \text{når } \delta \to 0,$$

siden $D^\alpha \varphi \in C_c(\Omega)$.

Dersom $\varphi \in C_c^k(\Omega)$, la $0 < \delta_1 < \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\varphi, \partial\Omega)$ og la $0 < \delta_j \le \delta_1$, $\delta_j \to 0$. Skriv $\varphi_j = \varphi * \rho_{\delta_j}$. Så er $\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq K$, der K er den kompakte mengden

$$K = \{x \in \Omega \mid |x| \le \max(\operatorname{supp}\varphi) + \delta_1 \text{ og } \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \ge \delta_1\}$$

For hver α med $|\alpha| \le k$ vil $D^\alpha \varphi_j \to D^\alpha \varphi$ uniformt.

(2) Dersom $\varphi \in C_c^k(\Omega)$, velg $\varphi_j \in C_c^\infty(\Omega)$, $\varphi_j \to \varphi$ i $C_c^k(\Omega)$. Om $K \subset \Omega$ er kompakt og $\operatorname{supp}\varphi_j \subseteq K$ for alle j, er $f|_K \in L^1(K)$, likeledes $D^\alpha f|_K \in L^1(K)$.

Siden $\int_\Omega (D^\alpha f)\varphi_j \, d^n x = (-1)^\alpha \int_\Omega f \, D^\alpha \varphi_j \, d^n x$,

og vi kan erstatte Ω med K i integralene, og $\varphi_j \to \varphi$ og $D^\alpha \varphi_j \to D^\alpha \varphi$ uniformt, får vi

$$\int_\Omega (D^\alpha f)\varphi \, d^n x = (-1)^\alpha \int_\Omega f \, D^\alpha \varphi \, d^n x$$

i grensen når $j \to \infty$.

(3) Her antar vi altså $f \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ og $g \in C^1(\Omega)$ og skal vise at $g\nabla f + f\nabla g$ er en svak gradient til fg. Så la $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega (g\nabla f + f\nabla g)\varphi \, d^n x = \int_\Omega (\varphi g \nabla f + \varphi f \nabla g)\, d^n x$$

$\varphi g \in C_c^1(\Omega)$ bruk (2)

$$= \int_\Omega (-f\nabla(\varphi g) + \varphi f \nabla g)\, d^n x$$

$$= \int_\Omega (-f(\cancel{\varphi \nabla g} + g\nabla\varphi) + \cancel{\varphi f \nabla g})\, d^n x$$

$$= -\int_\Omega (fg)\nabla\varphi \, d^n x$$

som er definisjonen av $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$ (svakt).

(4) Vi må vise at $(D^\alpha f) * \varphi$ er en svak derivert av $f * \varphi$.

Først er
$$D^\alpha f * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha f(y)\varphi(x-y)\, d^n y$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) D^\alpha \varphi(x-y)\, d^n y$$

ved definisjonen av svak derivert. (Vi får en faktor $(-1)^{|\alpha|}$ fra definisjonen, og en faktor $(-1)^{|\alpha|}$ til fordi vi deriverer $\varphi(x-y)$ mhp y.) For en $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ blir

$$\int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha f * \varphi(x)\, \phi(x)\, d^n x = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y) D^\alpha \varphi(x-y)\, d^n y\, \phi(x)\, d^n x$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha \varphi(x-y)\phi(x)\, d^n x\, dy$$
$$= (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) D^\alpha \phi(x)\, d^n x\, dy$$
$$= (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(x-y)\, d^n y\, D^\alpha\phi(x)\, d^n x$$
$$= (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} f * \varphi(x)\, D^\alpha \phi(x)\, d^n x.$$