TMA4305 2020: Øving for uke 43

Jeg har fått nytt skriveverktøy (reMarkable 2), så formatet på løsningene er nytt.

Oppgaver fra Borthwick:

7.1 (a) Vi har $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2$
og $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \|y\|^2$

Summer: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

(b) Med bruk av mine generaliserte Iverson brackets:
$f = [[0,2]]$ og $g = [[0,1]] - [[1,2]]$: $\|f\|_p = \|g\|_p = 2^{1/p}$

$f+g \equiv 2[[0,1]]$: $\|f+g\|_p = 2$
$f-g \equiv 2[[1,2]]$: $\|f-g\|_p = 2$

Dermed $\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2 = 8$, $2\|f\|_p^2 + 2\|g\|_p^2 = 4 \cdot 2^{2/p}$.
Disse er like hvis og bare hvis $p=2$!

(c) Samme funksjoner f og g som over:

$\|f \pm g\|_\infty = \|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$, så $\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 = 2$
men $2\|f\|_\infty^2 + 2\|g\|_\infty^2 = 4$.

7.2 $\|f_n\|_1 = \int_0^\infty n e^{-n^2 x}\,dx = \frac{1}{n} \to 0$ når $n \to \infty$

$\|f_n\|_2^2 = \int_0^\infty n^2 e^{-2n^2 x}\,dx = \frac{1}{2} \not\to$ når $n \to \infty$

7.3 $\|g_n\|_1 = \int_0^n n^{-1}\,dx = 1 \not\to 0$ når $n\to\infty$

$\|g_n\|_2^2 = \int_0^n n^{-2}\,dx = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ når $n\to\infty$

7.6 Antagelsa fra oppgave 6.4: Ω begrenset område i $\mathbb{R}^n$, "snill" rand, $u_t - \Delta u = 0$ i $(0,\infty)\times\Omega$, $\eta(t) = \int_\Omega u(t,\vec{x})^2\,d^n\vec{x}$

(a) Derivasjon under integraltegnet gir $\eta' = 2\int_\Omega u u_t \, d^n\vec{x}$.
Cauchy-Schwarz-Bunyakowski:

$$|\eta'(t)|^2 \le 4\int_\Omega |u|^2\,d^n\vec{x}\cdot\int_\Omega |u_t|^2\,d^n\vec{x} = 4\eta(t)\int_\Omega |u_t|^2\,d^n\vec{x}.$$

(b) Derivasjonen i (a) sammen med varmeligningen gir $\eta' = 2\int_\Omega u\,\Delta u\,d^n\vec{x}$, og dermed

$$\eta''(t) = 2\int_\Omega (u_t\,\Delta u + u\,\Delta u_t)\,d^n\vec{x}$$

Greens 2. identitet: $\int_\Omega (u\Delta u_t - u_t\Delta u)\,d^n x = \int_{\partial\Omega}(u\partial_\nu u_t - u_t\partial_\nu u)\,dS = 0$

fordi $u=0$ på $\partial\Omega$, dermed også $u_t = 0$

$$\eta''(t) = 4\int_\Omega u_t\,\Delta u\,d^n\vec{x} = 4\int_\Omega |u_t|^2\,d^n\vec{x}$$

(c) (a) og (b) kombinert: $(\eta')^2 \le \eta\eta''$.

Nå er $(\ln\eta)' = \dfrac{\eta'}{\eta}$, $(\ln\eta)'' = \dfrac{\eta''\eta-(\eta')^2}{\eta^2} \geq 0$

dvs. $\ln\eta$ er en konveks funksjon av t. Dermed

$$\ln\eta(t) \geq \ln\eta(0) + t\underbrace{(\ln\eta)'(0)}_{c} = ct + \ln\eta(0)$$

så $\eta(t) \geq \eta(0)e^{ct}$

(d) Hvis $\eta(t)=0$, så får vi da $\eta(0)\le 0$.
Men $\eta(0)=\int_\Omega |u(0,\vec{x})|^2\,d^n\vec{x}$, så det gir $u(0,\vec{x})=0$.

7.7 Formel (7.10) kan skrives mer generelt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x})\,d^n\vec{x} = \int_0^\infty \int_{\partial B_r(\vec{0})} f(\vec{x})\,dS(\vec{x})\,dr = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r\vec{x})\,dS(\vec{x})\cdot r^{n-1}\,dr$$

(i det siste integralet kan vi bytte integrasjonsrekkefølgen og få (7.10) eksakt.)

Som spesialtilfelle får vi $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(|\vec{x}|)\,d^n\vec{x} = A_n\int_0^\infty f(r)\,r^{n-1}\,dr$

(a) $g(\vec{x}) = |\vec{x}|^\gamma\,[|\vec{x}|\le 1]$ gir

$$\|g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |g|^p\,d^n\vec{x} = A_n\int_0^1 r^{\gamma p+n-1}\,dr < \infty \iff \gamma p+n-1 > -1$$
$$\iff \gamma > -\frac{n}{p}$$

(b) $h(\vec{x}) = |\vec{x}|^\gamma\,[|\vec{x}|\geq 1]$ gir

$$\|h\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |h|^p\,d^n\vec{x} = A_n\int_1^\infty r^{\gamma p+n-1}\,dr < \infty \iff \gamma p+n-1 < -1$$
$$\iff \gamma < -\frac{n}{p}$$