TMA4305 PDE 2020: Oppgaver for uke 41

B 9.3 $\Omega \subseteq B_R(\vec{0}) \subset \mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega) \cup C(\bar{\Omega})$

med $-\Delta u = f$, $u = 0$ på $\partial\Omega$

(a) $\Delta(u + c|\vec{x}|^2) = -f + 2nc \geq 0$ for $c = \frac{1}{2n} \max_{\Omega} f$

(maksimum finnes fordi $f \in C(\bar{\Omega})$, $\bar{\Omega}$ kompakt)

(b) Siden $u + c|\vec{x}|^2$ er subharmonisk og $u = 0$ på $\partial\Omega$,

er $u + c|\vec{x}|^2 \leq c \max_{\partial\Omega} |\vec{x}|^2 = cR^2$

(om R er valgt minst mulig).

Det gir også $u \leq cR^2$, siden $c|\vec{x}|^2 \geq 0$.

Med andre ord, $u \leq \frac{R^2}{2n} \max_{\Omega} f$

Siden også $-\Delta(-u) = -f$, $-u = 0$ på $\partial\Omega$,

får vi også

$$-u \leq \frac{R^2}{2n} \max_{\Omega}(-f), \text{ dvs. } u \geq \frac{R^2}{2n} \min_{\Omega} f$$

Siden $\max_{\Omega} f \leq \max_{\Omega} |f|$ og $\min_{\Omega} f \geq -\max_{\Omega} |f|$,

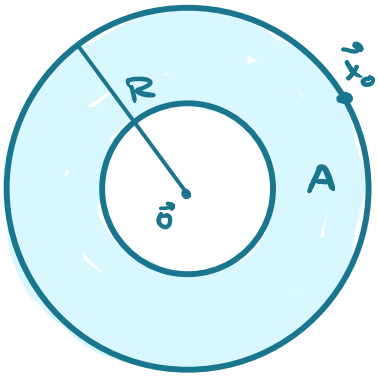
følger at $|u| \leq \frac{R^2}{2n} \max_{\Omega} |f|$.

Merk: På grunn av translasjonsinvariens

kan vi sette

$R = \min\{r : \Omega \subset B_r(\vec{x}_0) \text{ for en } \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n\}$

B 9.5 $u \in C^2(B) \cap C(\bar{B})$ ikke konstant, subharmonisk, maksimum i $\vec{x}_0 \in \partial B$



$B = B_R(\vec{0})$; $A = B_R(\vec{0}) \setminus \bar{B}_{R/2}(\vec{0})$

(a) $h(\vec{x}) = e^{-2n|\vec{x}|^2/R^2} - e^{-2n}$

$$h_{x_i} = -\frac{4n}{R^2} x_i e^{-2n|\vec{x}|^2/R^2}$$

$$h_{x_i x_i} = -\frac{4n}{R^2} e^{-2n|\vec{x}|^2/R^2} + \left(\frac{4n}{R^2} x_i\right)^2 e^{-2n|\vec{x}|^2/R^2}$$

$$\Delta h = \sum_{i=1}^{n} h_{x_i x_i} = \left(-\frac{4n^2}{R^2} + \left(\frac{4n}{R^2}|\vec{x}|\right)^2\right) e^{-2n|\vec{x}|^2/R^2}$$

$$> \left(-\frac{4n^2}{R^2} + \frac{16n^2}{R^4}\left(\frac{R}{2}\right)^2\right) e^{-2n|\vec{x}|^2/R^2} = 0$$

fordi $|\vec{x}| > \frac{R}{2}$

Eller? $h(\vec{x}) = \bar{h}(|\vec{x}|)$ der $\bar{h}(r) = e^{-ar^2} + \text{konst.}$, $a = \frac{2n}{R^2}$

$$\Delta h = \frac{1}{r^{n-1}}\left(r^{n-1} h'(r)\right)' = \frac{1}{r^{n-1}}\left(r^{n-1} \cdot (-2ar) e^{-ar^2}\right)'$$

$$= -\frac{2a}{r^{n-1}}\left(r^n e^{-ar^2}\right)' = -\frac{2a}{r^{n-1}}\left(n r^{n-1} - 2a r^{n+1}\right) e^{-ar^2}$$

$$= 2a\left(2ar^2 - n\right) e^{-ar^2}$$

$$\geq 2a\left(2a\left(\frac{R}{2}\right)^2 - n\right) e^{-ar^2}$$

$$= 2a\left(\frac{aR^2}{2} - n\right) e^{-ar^2} = 0 \quad \text{fordi } a = \frac{2n}{R^2}$$

(b) $m = \max\limits_{|\vec{x}|=R/2} u \qquad M = \max\limits_{|\vec{x}|=R} u$

Det sterke maksimumsprinsippet sier at u ikke har noe maksimum i $\overline{B}$, og spesielt ikke for $|\vec{x}|=R/2$. (Fordi u ikke er konstant.)

Det svake maksimumsprinsippet sier at $\max\limits_{\overline{B}} = M$, så $m < M$.

(c) $u_\varepsilon = u + \varepsilon h \quad (\varepsilon > 0)$

For $|\vec{x}|=R$ er $u_\varepsilon(\vec{x}) = u(\vec{x}) \le M$.

For $|\vec{x}|=R$ er $u_\varepsilon(\vec{x}) = u(\vec{x}) + \varepsilon(e^{-n/2} - e^{-2n})$

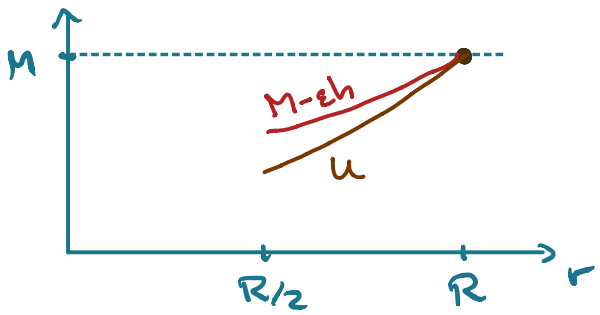
$$\le m + (e^{-n/2} - e^{-2n}) \le M$$

dersom $\varepsilon = (M-m)/(e^{-n/2} - e^{-2n})$.

(d) og (e)

u_ε er subharmonisk og $\le M$ på ∂A, så $u_\varepsilon \le M$ i A.

Det gir $u \le M - \varepsilon h$. Spesielt, for $\vec{x} = \frac{r}{R}\vec{x}_0$:



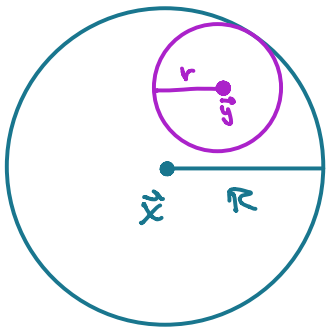
Figuren gjør det tydelig at $\partial_r u \ge 0$ for $r=R$, dvs. i $\vec{x}_0$.

$(\eta > 0)$ $$\frac{u(R-\eta)-u(R)}{-\eta} = \frac{u(R-\eta)-M}{-\eta} \ge \frac{M-\varepsilon h(R-\eta)-M}{-\eta}$$

$$= -\varepsilon\,\frac{h(R-\eta)-h(R)}{\eta} \xrightarrow[(\eta\to 0)]{} -\varepsilon h'(R) > 0$$

$\square$

X7



Vi finner

$$\frac{A_n r^n}{n} u(\vec{y}) = \int_{B_r(\vec{y})} u \, d^n\vec{z}$$

$$\leq \int_{B_R(\vec{x})} u \, d^n\vec{z} = \frac{A_n}{n} R^n u(\vec{x})$$

og derfor $u(\vec{y}) \leq \left(\frac{R}{r}\right)^n u(\vec{x}) = \left(\frac{R}{R - |\vec{x}-\vec{y}|}\right)^n u(\vec{x})$

$$= \left(1 - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{R}\right)^{-n} u(x).$$

$\square$

Verdt å merke seg: Denne ulikheten ligner ganske mye på Harnacks ulikhet.