TMA4305 PDE 2020: Oppgaver for uke 40

Maksimumsprinsippet 1:

Exercise 1 (Continuous dependence on data, improved). Assume that u_1 and u_2 satisfy

$$\left.\begin{aligned} \partial_t u_i - \Delta u_i &= f_i \quad \text{in } \Omega_T, \\ u_i &= g_i \quad \text{on } \Gamma, \end{aligned}\right\} \quad \text{for } i = 1, 2.$$

Let $\varphi = \sup_{\Omega_T} |f_1 - f_2|$ and $\gamma = \max_\Gamma |g_1 - g_2|$, and show that $|u_1 - u_2| \le \gamma + \varphi T$.

Note that for any t, we can pick $T = t$, so we really get $|u_1 - u_2| \le \gamma + \varphi t$.

Hint: Apply the maximum principle to $u_1 - u_2 - \varphi t$ and $u_2 - u_1 - \varphi t$.

Vi tar hintet, og setter $u = u_1 - u_2 - \varphi t$.

Da er $u_t - \Delta u = u_{1t} - \Delta u_1 - u_{2t} + \Delta u_2 - \varphi$
$= f_1 - f_2 - \varphi \le 0$

På Γ er $u = u_1 - u_2 - \varphi t = g_1 - g_2 - \varphi t \le \gamma - \varphi t \le \gamma$

så ved maksimumsprinsippet er $u \le \gamma$ på $\overline{\Omega}_T$,

og dermed $u_1 - u_2 = u + \varphi t \le \gamma + \varphi t$.

Tilsvarende $u_2 - u_1 \le \gamma + \varphi t$, $\Big\} \Rightarrow |u_1 - u_2| \le \gamma + \varphi t$

(Et hakk enklere enn hva oppgaven antyder!) $\square$

Maksimumsprinsippet 2:

Exercise 2. Show that the maximum (and minimum) principle continues to hold if $u_t - \Delta u$ is replaced by

$$u_t - \Delta u + b(\nabla u),$$

~~where the real matrix A is symmetric and positive definite~~, provided the continuous function b satisfies $b(\mathbf{0}) = 0$. (For a simple and common example, let $b(\nabla u) = \boldsymbol{b} \cdot \nabla u$.)

(setningen jeg strøk ut hang igjen fra en tidligere utgave av oppgaven ...)

Så nå antar vi at $u_t - \Delta u + b(\nabla u) \leq 0$

Som før setter vi $v(t,\vec{x}) = u(t,\vec{x}) - \varepsilon t$, $\varepsilon > 0$.

Dersom v har et maksimum i $(t,\vec{x})$ men ikke på den parabolske randen, er $v_t \geq 0$, $\nabla v = 0$ og $\Delta v \leq 0$ i punktet.

Men $v_t - \Delta v = u_t - \Delta u - \varepsilon = -b(\nabla v) - \varepsilon = -\varepsilon < 0$, så det er umulig.

Dermed er $v \leq \max_\Gamma v \leq \max_\Gamma u$

$u = v + \varepsilon t \leq \max_\Gamma u + \varepsilon T$, så $u \leq \max_\Gamma u$

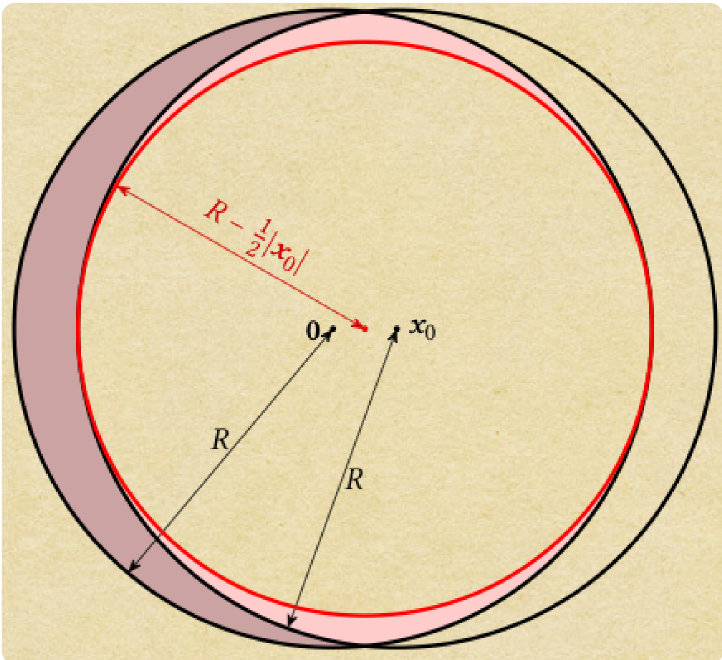
fordi $\varepsilon > 0$ var vilkårlig. $\square$

B 9.2 Anta u harmonisk på $\mathbb{R}^n$, $|u| \le M$

(a) Middelverdiegenskapen gir $u(\vec{x}_0) = \fint_{B(\vec{x},R)} u \, d^n\vec{x}$

$$u(0) - u(x_0) = \fint_{B(\vec{0},R)} u(\vec{x})\, d^n\vec{x} - \fint_{B(\vec{x}_0,R)} u(\vec{x})\, d^n\vec{x}$$

(b) Bildet gir idéen: Skriv for korthets skyld



$B_0 = B(\vec{0}, R)$

$B_1 = B(\vec{x}_0, R)$

$B_2 = B(\tfrac{1}{2}\vec{x}_0, R - \tfrac{1}{2}|\vec{x}_0|)$

(rød sirkel i bildet)

Så er $B_2 \subset B_0 \cap B$

(Bevis: $x \in B_2 \Leftrightarrow |\vec{x} - \tfrac{1}{2}\vec{x}_0| < R - \tfrac{1}{2}|\vec{x}_0|$

$\Rightarrow |\vec{x}| \le |\vec{x} - \tfrac{1}{2}\vec{x}_0| + |\tfrac{1}{2}\vec{x}_0| < R - \tfrac{1}{2}|\vec{x}_0| + \tfrac{1}{2}|\vec{x}_0| = R$

og $x \in B_2 \Rightarrow |\vec{x} - \vec{x}_0| \le |\vec{x} - \tfrac{1}{2}\vec{x}_0| + |\tfrac{1}{2}x_0 - x_0| < R$)

Derfor er $B_0 \setminus B_1 \subset B_0 \setminus B_2$, så

$$\mathrm{vol}(B_0 \setminus B_2) \le \mathrm{vol}(B_0 \setminus B_2) = \mathrm{vol}(B_0) - \mathrm{vol}(B_2)$$

$$= \frac{A_n}{n}\left(R^n - (R - \tfrac{1}{2}|x_0|)^n\right).$$

Samme resonnement virker for $\mathrm{vol}(B_1 \setminus B_2)$

(c) Nå blir

$$u(\vec{0}) - u(\vec{x}_0) = \frac{n}{A_n R^n}\left(\int_{B_0} u \, d^n\vec{x} - \int_{B_1} u \, d^n\vec{x} \right)$$

Skriv

$$\int_{B_0} = \int_{B_0 \setminus B_1} + \int_{B_0 \cap B_1}$$

og

$$\int_{B_1} = \int_{B_1 \setminus B_0} + \int_{B_0 \cap B_1}$$

og konkluder:

$$|u(\vec{0}) - u(\vec{x}_0)| = \frac{n}{A_n R^n}\left| \int_{B_0 \setminus B_1} u \, d^n\vec{x} - \int_{B_1 \setminus B_0} u \, d^n\vec{x} \right|$$

$$\leq \frac{n}{A_n R^n}\left(\int_{B_0 \setminus B_1} |u| \, d^n\vec{x} + \int_{B_1 \setminus B_0} |u| \, d^n\vec{x} \right)$$

$$\leq \frac{Mn}{A_n R^n}\left(\mathrm{vol}(B_0 \setminus B_1) + \mathrm{vol}(B_1 \setminus B_0) \right)$$

$$\leq 2 \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{|\vec{x}_0|}{R}\right)^n \right)$$

$$\to 0 \text{ når } R \to \infty.$$

Altså $|u(\vec{0}) - u(\vec{x}_0)| = 0$, så $u(\vec{x}_0) = u(\vec{0})$.

X 6

(a) $w(t,\vec{x}) = e^{-nt} \prod_{i=1}^{n} \sin x_i$ in $[0,\infty) \times \bar{Q}$

$Q = (0,\pi)^n \subset \mathbb{R}^n$

$w_t = -n\,w$, $w_{x_i x_i} = -w$, $\Delta w = -n w$

så $w_t = \Delta w$

(b) $\bar{\Omega} \subset Q$ $u \in C([0,\infty) \times \bar{\Omega}) \cap C^2((0,\infty) \times \bar{\Omega})$

oppfylle $u_t - \Delta u = 0$, og $u = 0$ på $\partial\Omega$ (alle $t \geq 0$).

Siden $w(0,\vec{x}) > 0$ på den kompakte mengden $\bar{\Omega}$, har den et minimum på $\bar{\Omega}$. På samme måte har $|u(0,\vec{x})|$ et maksimum på $\bar{\Omega}$. Dermed, om $m = \max_{\vec{x} \in \bar{\Omega}} w(0,\vec{x}) / \min_{\vec{x} \in \bar{\Omega}} |u(0,\vec{x})|$

får vi $w(0,\vec{x}) \pm m u(0,\vec{x}) \geq 0$ på Ω.

Videre $w > 0$ and $u = 0$ på $\partial\Omega$ (alle t),

så $w \pm m u > 0$ på $\partial\Omega$.

Minimumsprinsippet gir at $w \pm m u \geq 0$ i Ω,

Det vil si $m|u| \leq w \leq e^{-nt}$ i Ω, og derfor

$|u| \leq m^{-1} e^{-nt} \longrightarrow 0$ når $t \to \infty$.