TMA4305 PDE 2020: Øvinger for uke 39

B 6.1

$$u_t + \gamma u - \Delta u = 0 \qquad u(0,\vec{x}) = f(\vec{x})$$

Skriv $u = e^{-\gamma t} v$: Da blir

$$(v_t - \gamma v)\cancel{e^{-\gamma t}} + \gamma v \cancel{e^{-\gamma t}} - \Delta v \cancel{e^{-\gamma t}} = 0$$

$$v_t - \Delta v = 0 \qquad v(0,\vec{x}) = f(\vec{x})$$

Løsning $\vec{v}(t,\vec{x}) = H_t * f(\vec{x})$

Dermed: $\vec{u}(t,\vec{x}) = e^{-\gamma t} H_t * f(\vec{x})$

B 6.3

$$u_t - \Delta u = 0 \text{ på } (0,\infty)\times\Omega$$

$$\mathcal{U}(t) = \int_\Omega u(t,\vec{x})\, d^n\vec{x}$$

Punkt (a) har vi jo allerede debattert i forelesningene

(a) Anta at $\partial_n u = 0$ på $\partial\Omega$; da er

$$\dot{\mathcal{U}}(t) = \int_\Omega u_t(t,\vec{x})\, d^n\vec{x} = \int_\Omega \Delta u(t,\vec{x})\, d^n\vec{x} = \int_{\partial\Omega} \partial_n u \, dS = 0$$

(b) Anta nå $u > 0$ i Ω, $u = 0$ på $\partial\Omega$:
Da er $\partial_n u \leq 0$ på $\partial\Omega$, så utregningen over gir i stedet $\dot{\mathcal{U}}(t) \leq 0$

Merknad: Dersom $\mathcal{U}(0) > 0$, sier fysisk intuisjon at $\dot{\mathcal{U}} < 0$ for $t > 0$ [ikke nødvendigvis for $t = 0$]. Men dette virker vanskelig å vise med de verktøyene vi har for hånden akkurat nå.

B 6.4 Dette har vi debatert i forelesningen!
Men det skader ikke å se det igjen.
u^2 oppfører seg som <u>negativ</u> entropitetthet

$u_t - \Delta u = 0$ på Ω, $\eta(t) = \int_\Omega u(t,\vec{x})^2 \, d^n\vec{x}$

(a) Med Dirichlet randbetingelser: $u = 0$ på $\partial\Omega$

$$\dot{\eta}(t) = 2\int_\Omega u u_t \, d^n\vec{x} = 2\int_\Omega u \Delta u \, d^n\vec{x}$$

$$= 2\int_\Omega \left(\nabla\cdot(u\nabla u) - |\nabla u|^2\right) d^n\vec{x}$$

$$= \underbrace{2\int_{\partial\Omega} u\partial_n u \, dS}_{=0} - \underbrace{2\int_\Omega |\nabla u|^2 d^n x}_{\geq 0} \leq 0$$

< 0 hvis ikke u er konstant

(b) Entydighet for Neumann r.b.: $u(0,\vec{x}) = g(\vec{x})$ i Ω
$\partial_n u(t,\vec{x}) = h(\vec{x})$ på $\partial\Omega$

Gitt to løsninger u_1, u_2, la $u = u_1 - u_2$
Da er $u_t - \Delta u = 0$ i $(0,\infty)\times\Omega$, $u(0,\vec{x}) = 0$ i Ω
$\partial_n u(t,\vec{x}) = 0$ på $\partial\Omega$

Samme utregning som ovenfor viser $\dot{\eta}(t) \leq 0$.
(Denne gangen er $\int_{\partial\Omega} u\partial_n u \, dS = 0$ fordi $\partial_n u = 0$.)

Fordi $\eta(t) \geq 0$ alltid og $\eta(0) = 0$, må $\eta(t) = 0$ for alle t, så $u = 0$.