

TMA4305 PDEs 2020: Øvinger for uke 35

B 3.6
(a)

Burgers :

$$u_t + uu_x = 0$$

↑ karakteristiske hastighet

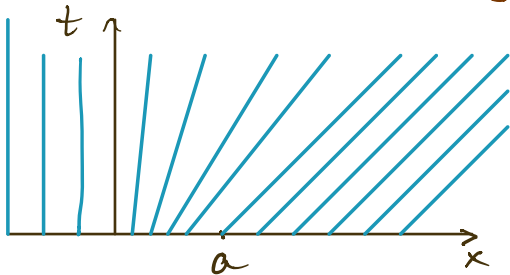
Karakteristikkene som starter i $x = \xi \in [0, a]$

har ligning

$$x = \xi + t\xi/a$$

$$\xi = x / (1 + t/a)$$

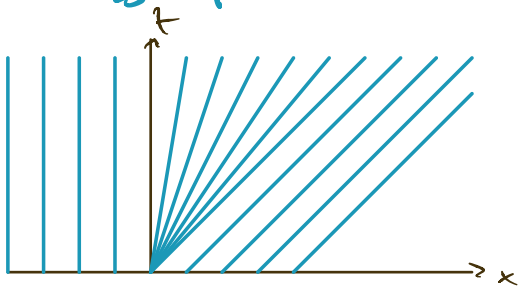
$$u = \frac{\xi}{a} = \frac{x}{a+t}$$



$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{a+t} & 0 < x < a+t \\ 1 & x \geq a+t \end{cases}$$

Tilleggs-spør:

Grensen når $a \rightarrow 0$ er



$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{t} & 0 < x < t \\ 1 & x \geq t \end{cases}$$

(b) Karakteristikkene som starter i $\xi \in [0, 1]$

for ligning

$$x = \xi + t(a(1-\xi) + b\xi)$$

$$= (1 + (b-a)t)\xi + at$$

De faller sammen når denne parenteser er 0,

dvs. for $t = \frac{1}{b-a}$

X1:

$$u_t + u^2 u_x = 0$$

$$u(0, x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Karakteristisk hastighed er u^2 ,
så karakteristikkene fra $x = \xi$ har ligning

$$x = \xi + t c(\xi), \quad c(\xi) = \left(\frac{1}{1+\xi^2} \right)^2$$

$$\text{dermed } \frac{\partial x}{\partial \xi} = 1 + t c'(\xi) = 1 - \frac{4\xi t}{(1+\xi^2)^3}$$

som er positiv for alle ξ hvis og bare hvis

$$\frac{4\xi t}{(1+\xi^2)^2} < 1 \text{ for alle } \xi.$$

Det holder altid for $\xi \leq 0$; vi sjekker nu $\xi > 0$.

$$\text{det gir } 4t < \frac{(1+\xi^2)^3}{\xi} \text{ for alle } \xi > 0$$

Deriver for å finne minste verdi av høyresiden:

$$\frac{d}{d\xi} \frac{(1+\xi^2)^3}{\xi} = \frac{6\xi(1+\xi^2)^2 \cdot \xi - (1+\xi^2)^3}{\xi^2} = \frac{5\xi^2 - 1}{\xi^2} (1+\xi^2)^2$$

so minimum oppnås for $5\xi^2 = 1$.

Dermed holder den klassiske løsningen kun for $t < T$,

$$T = \frac{(1+\xi^2)^3}{4\xi} = \frac{(6/5)^3}{4\sqrt{1/5}} = \frac{1}{4} \left(\frac{6}{5} \right)^3 \sqrt{5}$$