NTNU

Det skapende universitet

Pensumsdiskusjonsforelesning

Forventningsverdi, varians og kovarians

Geir-Arne Fuglstad

Uke 6

Kort repetitisjon – Del 1

Definition (Forventningsverdi)

Hvis g er en funksjon og X er en stokastisk variabel så er **forventningsverdien** til $g(X)$ gitt ved

$$\mathrm{E}[g(X)] = \begin{cases} \sum_x g(x)f(x), & X \text{ er diskret} \\ \int g(x)f(x)\mathrm{d}x, & X \text{ er kontinuerlig.} \end{cases}$$

Merk: $f(x)$ er en punktsannsynlighet hvis X er diskret, og $f(x)$ er en sannsynlighetstetthet hvis X er kontinuerlig.

Kort repetitisjon – Del 2

Definition (Varians)

Hvis X er en stokastisk variabel så er **variansen** til X gitt ved

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}\left[X\right]^2.$$

Merk: Forvetningsverdiene regnes ut som summer eller integraler.
Merk 2: Standardavviket er $\mathrm{SD}[X] = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$.

Kort repetitisjon – Del 3

Definition (Kovarians)

Hvis X og Y er stokastiske variabler er **kovariansen** mellom X og Y gitt ved

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])\right] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y].$$

Korrelasjon er en skalert versjon av kovarians,

$$-1 \leq \mathrm{Corr}[X, Y] = \frac{\mathrm{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]\mathrm{Var}[Y]}} \leq 1.$$

Kort repetitisjon – Del 4

La X og Y være stokastiske variabler og la a, b, c være reelle tall. Da har vi

$$\mathrm{E}[aX + bY + c] = a\mathrm{E}[X] + b\mathrm{E}[Y] + c,$$
$$\mathrm{Var}[aX + bY + c] = a^2\mathrm{Var}[X] + b^2\mathrm{Var}[Y] + 2ab\mathrm{Cov}[X, Y].$$

Merk: Hvis X og Y er uavhengige er $\mathrm{Cov}[X, Y] = 0$.

Oppgave 1

Et spill foregår på følgende måte. Hver runde koster det 3 kr å delta, man kaster én terning, og man vinner «antall øyne» kr. Lønner det seg å spille dette spillet i lengden?

Oppgave 2

Et spill foregår på følgende måte. Hver runde koster det 3 kr å delta, man kaster én terning, og man vinner «antall øyne» kr. Vi ønsker å se nærmere på gjennomsnittlig netto gevinst per runde.

Oppgave 2

Et spill foregår på følgende måte. Hver runde koster det 3 kr å delta, man kaster én terning, og man vinner «antall øyne» kr. Vi ønsker å se nærmere på gjennomsnittlig netto gevinst per runde.

a) Regn ut forventningsverdi, varians og standardavvik til «gjennomsnittlig netto gevinst per runde» hvis det spilles én runde.

Oppgave 2

Et spill foregår på følgende måte. Hver runde koster det 3 kr å delta, man kaster én terning, og man vinner «antall øyne» kr. Vi ønsker å se nærmere på gjennomsnittlig netto gevinst per runde.

a) Regn ut forventningsverdi, varians og standardavvik til «gjennomsnittlig netto gevinst per runde» hvis det spilles én runde.

b) Regn ut forventningsverdi, varians og standardavvik til «gjennomsnittlig netto gevinst per runde» hvis det spilles tre runde.

Oppgave 3

En urne inneholder tre kuler: én rød, én blå og én grønn. Vi skal trekke to kuler tilfeldig uten tilbakelegging, og la

$$R = \text{«Antall røde kuler»},$$
$$G = \text{«Antall grønne kuler»},$$
$$B = \text{«Antall blå kuler»}.$$

Oppgave 3

En urne inneholder tre kuler: én rød, én blå og én grønn. Vi skal trekke to kuler tilfeldig uten tilbakelegging, og la

$$R = \text{«Antall røde kuler»},$$
$$G = \text{«Antall grønne kuler»},$$
$$B = \text{«Antall blå kuler»}.$$

a) Finn marginalfordelingene til R og B.

Oppgave 3

En urne inneholder tre kuler: én rød, én blå og én grønn. Vi skal trekke to kuler tilfeldig uten tilbakelegging, og la

$$\begin{aligned} R &= \text{«Antall røde kuler»}, \\ G &= \text{«Antall grønne kuler»}, \\ B &= \text{«Antall blå kuler»}. \end{aligned}$$

a) Finn marginalfordelingene til R og B.

b) Finn simultanfordelingen til R og B.

Oppgave 3

En urne inneholder tre kuler: én rød, én blå og én grønn. Vi skal trekke to kuler tilfeldig uten tilbakelegging, og la

$$R = \text{«Antall røde kuler»},$$
$$G = \text{«Antall grønne kuler»},$$
$$B = \text{«Antall blå kuler»}.$$

a) Finn marginalfordelingene til R og B.
b) Finn simultanfordelingen til R og B.
c) Finn kovariansen mellom R og B.

Oppgave 3

En urne inneholder tre kuler: én rød, én blå og én grønn. Vi skal trekke to kuler tilfeldig uten tilbakelegging, og la

$$R = \text{«Antall røde kuler»},$$
$$G = \text{«Antall grønne kuler»},$$
$$B = \text{«Antall blå kuler»}.$$

a) Finn marginalfordelingene til R og B.
b) Finn simultanfordelingen til R og B.
c) Finn kovariansen mellom R og B.
d) Tolk fortegnet til $\mathrm{Cov}[R, B]$.

Oppgave 4

Vi kaster pil på en blink. Vi antar at blinken er beskrevet av kvadratet $0 < x, y < 1$ og at posisjonen til treffet er beskrevet av de stokastiske variablene X og Y. Vi antar at simultanfordelingen er

$$f(x, y) = 2x, \quad 0 < x, y < 1.$$

Oppgave 4

Vi kaster pil på en blink. Vi antar at blinken er beskrevet av kvadratet $0 < x, y < 1$ og at posisjonen til treffet er beskrevet av de stokastiske variablene X og Y. Vi antar at simultanfordelingen er

$$f(x, y) = 2x, \quad 0 < x, y < 1.$$

a) Finn marginalfordelingene til X og Y.

Oppgave 4

Vi kaster pil på en blink. Vi antar at blinken er beskrevet av kvadratet $0 < x, y < 1$ og at posisjonen til treffet er beskrevet av de stokastiske variablene X og Y. Vi antar at simultanfordelingen er

$$f(x, y) = 2x, \quad 0 < x, y < 1.$$

a) Finn marginalfordelingene til X og Y.

b) Finn forventningsverdiene til X og Y.

Oppgave 4

Vi kaster pil på en blink. Vi antar at blinken er beskrevet av kvadratet $0 < x, y < 1$ og at posisjonen til treffet er beskrevet av de stokastiske variablene X og Y. Vi antar at simultanfordelingen er

$$f(x, y) = 2x, \quad 0 < x, y < 1.$$

a) Finn marginalfordelingene til X og Y.
b) Finn forventningsverdiene til X og Y.
c) Finn kovariansen mellom X og Y.

Oppgave 4

Vi kaster pil på en blink. Vi antar at blinken er beskrevet av kvadratet $0 < x, y < 1$ og at posisjonen til treffet er beskrevet av de stokastiske variablene X og Y. Vi antar at simultanfordelingen er

$$f(x, y) = 2x, \quad 0 < x, y < 1.$$

a) Finn marginalfordelingene til X og Y.
b) Finn forventningsverdiene til X og Y.
c) Finn kovariansen mellom X og Y.
d) Er X og Y uavhengige?

Oppgave 5

Anta at vi har tre stokastiske variabler X, Y og Z med varianser henholdsvis 1, 4 og 9. Anta at $\mathrm{Cov}[X, Y] = 1$ og $\mathrm{Cov}[X, Z] = 2$.

Oppgave 5

Anta at vi har tre stokastiske variabler X, Y og Z med varianser henholdsvis 1, 4 og 9. Anta at $\mathrm{Cov}[X, Y] = 1$ og $\mathrm{Cov}[X, Z] = 2$.

a) Er korrelasjonen størst mellom X og Y eller mellom X og Z?

Oppgave 5

Anta at vi har tre stokastiske variabler X, Y og Z med varianser henholdsvis 1, 4 og 9. Anta at $\mathrm{Cov}[X, Y] = 1$ og $\mathrm{Cov}[X, Z] = 2$.

a) Er korrelasjonen størst mellom X og Y eller mellom X og Z?

b) Finn $a \in \mathbb{R}$ slik at korrelasjonen mellom X og $Y + aZ$ er 0.