Døra til lukke/Monty Hall

I dette dokumentet skal me sjå på det kjende Monty-Hall problemet som undervist 17.01.2018. Målet er å gi grundigare forklaring enn me fekk tid til i forelesinga.

Situasjon: Spel med programleiar, ein deltakar og ein premie

- Tre dører, numerert 1, 2, 3.
- Premie bak ei av dørene (bestemd på førehand og alle dørene er like sannsynlege)
- Programleiaren veit kvar premien er

Prosedyre: Spelereglar:

- Deltakeren vel ei av dørene, men opnar den ikkje. Sannsynet for å velge kvar av dørene er likt
- Programleiaren opnar ei av dei andre dørene der han/ho veit at det ikkje er premie
- Deltakaren får valet mellom å oppretthalde valet sitt eller å byte til den siste døra

Spørsmål: Bør deltakaren byte dør?

Me definerer følgande hendingar:

A_i : premien er bak dør $i = 1, 2, 3$

D_i : deltakaren vel dør $i = 1, 2, 3$

E_i : programleiaren opnar dør $i = 1, 2, 3$

Ved å nytte hendingane definert ovanfor er spørsmålet me skal svare på over det same som å finne sannsynet $P(A_l|D_i \cap E_j)$. Eller, med ord, kva er sannsynet for at gevinsten er bak dør l gjeve at deltakaren har veld dør i og programleiaren har opna dør j.

Merk at døra deltakaren vel følgjer ei uniform sannsynsmodell, dvs. $P(D_i) = 1/3$ for $i = 1, 2, 3$.
Sidan premien er plassert før deltakaren vel dør har me $P(A_l|D_i) = P(A_l) = 1/3$ for $l = 1, 2, 3$ og $i = 1, 2, 3$, dvs. at A_l og D_i er uavhengige.

Me er interessert i $P(A_l|D_i \cap E_j)$ for $i \neq j$ og $l \neq j$. Merk at

- me må ha $i \neq j$ sidan deltakaren ikkje kan velge dør i samtidig som programleiaren opnar dør i
- mde må ha $l \neq j$ sidan programleiaren må opne ei *anna* dør enn den premien er bak

Gjeve $i \neq j$ og $l \neq j$ har me (alternativt sjå Tabell 1 for alle kombinasjonane)

$$P(E_j|D_i \cap A_l) = \begin{cases} 0 & l = j \\ 1/2 & l = i \\ 1 & l \neq i, l \neq j \end{cases}$$

Table 1: Oversikt over $P(E_j|D_i \cap A_l)$ for alle kombinasjonar av i, j, l.

	E_1	E_2	E_3
$D_1 \cap A_1$	Ikkje mogleg sidan $i = j$	1/2	1/2
$D_1 \cap A_2$	Ikkje mogleg sidan $i = j$	Ikkje mogleg sidan $l = j$	1
$D_1 \cap A_3$	Ikkje mogleg sidan $i = j$	1	Ikkje mogleg sidan $l = j$
$D_2 \cap A_1$	Ikkje mogleg sidan $l = j$	Ikkje mogleg sidan $i = j$	1
$D_2 \cap A_2$	1/2	Ikkje mogleg sidan $i = j$	1/2
$D_2 \cap A_3$	1	Ikkje mogleg sidan $i = j$	Ikkje mogleg sidan $j = l$
$D_3 \cap A_1$	Ikkje mogleg sidan $j = l$	1	Ikkje mogleg sidan $i = j$
$D_3 \cap A_2$	1	Ikkje mogleg sidan $j = l$	Ikkje mogleg sidan $i = j$
$D_3 \cap A_3$	1/2	1/2	Ikkje mogleg sidan $l = j$

Frå produktregelen har me at

$$P(A_l \cap D_i \cap E_j) = P(D_i)P(A_l|D_i)P(E_j|D_i \cap A_l). \tag{1}$$

Hugs at frå lova om totalt sannsyn har me

$$\begin{aligned} P(D_i \cap E_j) &= \sum_{m=1}^{3} P(A_m \cap D_i \cap E_j) \\ &= \sum_{m=1}^{3} P(D_i)P(A_m|D_i)P(E_j|D_i \cap A_m) \end{aligned} \tag{2}$$

sidan A_1, A_2, A_3 er ein partisjon av utfallsrommet (for kva dør gevinsten er bak). Sjå no på det søkte sannsynet:

$$\begin{aligned} P(A_l|D_i \cap E_j) &= \frac{P(A_l \cap D_i \cap E_j)}{P(D_i \cap E_j)} && \text{definisjonen på betinga sannsyn} \\ &= \frac{P(D_i)P(A_l|D_i)P(E_j|D_i \cap A_l)}{\sum_{m=1}^{3} P(D_i)P(A_m|D_i)P(E_j|D_i \cap A_m)} && \text{innsatt (1) og (2)} \\ &= \frac{P(D_i)P(A_l)P(E_j|D_i \cap A_l)}{\sum_{m=1}^{3} P(D_i)P(A_m)P(E_j|D_i \cap A_m)} && A_m \text{ og } D_i \text{ uavhengige} \\ &= \frac{P(E_j|D_i \cap A_l)}{\sum_{m=1}^{3} P(E_j|D_i \cap A_m)} && \text{sidan } P(A_l) = P(D_i) = \frac{1}{3} \text{ for alle } i, l = 1, 2, 3 \\ &= \frac{2}{3} P(E_j|D_i \cap A_l) && \text{sjåast dersom ein ser på alle summane} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{3} & l = i \\ \frac{2}{3} & l \neq i \end{cases}. \end{aligned} \tag{3}$$

Det kan vere enklare å sjå på alle moglege utfalla me kan ha (sjå Tabell 3).

Table 2: Oversikt over $P(A_l|D_i \cap E_j)$ for alle kombinasjonar av i, j, l.

	A_1	A_2	A_3
$D_1 \cap E_1$	Ikkje mogleg sidan $i = j$	Ikkje mogleg sidan $i = j$	Ikkje mogleg sidan $i = j$
$D_1 \cap E_2$	$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3}$	Ikkje mogleg sidan $l = j$	$\frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}$
$D_1 \cap E_3$	$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}$	Ikkje mogleg sidan $j = l$
$D_2 \cap E_1$	Ikkje mogleg sidan $l = j$	$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}$
$D_2 \cap E_2$	Ikkje mogleg sidan $i = j$	Ikkje mogleg sidan $i = j$	Ikkje mogleg sidan $i = j$
$D_2 \cap E_3$	$\frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}$	$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3}$	Ikkje mogleg sidan $j = l$
$D_3 \cap E_1$	Ikkje mogleg sidan $j = l$	$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}$
$D_3 \cap E_2$	$\frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}$	Ikkje mogleg sidan $j = l$	$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3}$
$D_3 \cap E_3$	Ikkje mogleg sidan $i = j$	Ikkje mogleg sidan $i = j$	Ikkje mogleg sidan $i = j$