

Lineærkombinasjon av normalfordelte stokastiske variabler

21. februar 2018

Teorem

La X_1, \dots, X_n vere uavhengige normalfordelte stokastiske variabler med forventning $E(X_i) = \mu_i$ og varians $Var(X_i) = \sigma_i^2$. Då er

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$$

der a_i er konstantar normalfordelt med forventning

$$\mu_Y = a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \dots + a_n \mu_n$$

og varians

$$\sigma_Y^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2.$$

Bevis

Det kan visast at den momentgenererande funksjonen til ein normalfordelt stokastisk variabel Z med forventning μ og varians σ^2 er:

$$M_Z(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

Sidan X_i -ane er uavhengige har me frå rekneregul 2 og 3 for momentgenererande funksjonar at

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= M_{X_1}(a_1 t) M_{X_2}(a_2 t) \cdots M_{X_n}(a_n t) \\ &= \exp\left(a_1 \mu_1 t + \frac{\sigma_1^2 a_1^2 t^2}{2}\right) \exp\left(a_2 \mu_2 t + \frac{\sigma_2^2 a_2^2 t^2}{2}\right) \cdots \exp\left(a_n \mu_n t + \frac{\sigma_n^2 a_n^2 t^2}{2}\right) \\ &= \exp\left(t \sum_{i=1}^n a_i \mu_i + \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2\right) \end{aligned}$$

Me kjenner att dette som den moment genererande funksjonen til ein normalfordelt stokastisk variabel med forventning

$$\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i$$

og varians

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2.$$