



Forelesing 14

Ordningsvariable

Torstein Fjeldstad

Institutt for matematiske fag, NTNU

21.02.2018

I dag



- Egenskapar til momentgenererande funksjonar
- Ordningsvariable

Repetisjon I



Situasjon:

- X_1, \dots, X_n uavhengige SV
- X_i -ane har kjend fordeling
- Definer $Y = u(X_1, \dots, X_n)$
- Kva er fordelinga til Y ?

Me skal sjå på følgjande:

- Ein X ($n = 1$) og $u(X)$ ein-eintydig
- Fleire X_i -ar ($n \geq 1$) og $u(X_1, \dots, X_n)$ ein lineær funksjon
- Fleire X_i -ar ($n > 1$) der $u(X_1, \dots, X_n)$ gir den k -te minste verdien



Diskret tilfelle

La X vere eit diskret stokastisk variabel med fordeling $f(x)$. La $Y = u(X)$ definere ein ein-eintydig funksjon mellom X og Y , dvs

$$Y = u(X) \Leftrightarrow X = w(Y).$$

Då er fordelinga til Y gjeve ved

$$g(y) = f(w(y)).$$

Repetisjon III



Kontinuerleg tilfelle

La X vere eit kontinuerleg stokastisk variabel med fordeling $f(x)$. La $Y = u(X)$ definere ein ein-eintydig funksjon mellom X og Y , dvs

$$Y = u(X) \Leftrightarrow X = w(Y).$$

Då er fordelinga til Y gjeve ved

$$g(y) = f(w(y))|w'(y)|.$$

Repetisjon IV

Moment (def)

Det r -te ordens moment til ein stokastisk variabel X er

$$\mu_r = E(X^r) = \begin{cases} \sum_x x^r f(x) & \text{diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx & \text{kontinuerleg} \end{cases} .$$

Momentgenererende funksjon (def)

Den momentgenererende funksjonen til ein stokastisk variabel X er

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f(x) & \text{diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx & \text{kontinuerleg} \end{cases} .$$

Repetisjon V

Teorem 7.6

$$M_X^{(r)}(0) = \mu_r$$

Standardisering av ein normalfordelt SV

For ein normalfordelt stokastisk variabel X med forventning μ og varians σ^2 er

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

standard normalfordelt.

Repetisjon VI



Unikhet (teorem 7.7)

La X og Y vere to stokastiske variable med momentgenererende funksjonar $M_X(t)$ og $M_Y(t)$. Dersom $M_X(t) = M_Y(t)$ for alle t er fordelingane til X og Y like.

Reknereglar I



Reknereglar

1. $M_{X+a}(t) = e^{at}M_X(t)$
2. $M_{aX}(t) = M_X(at)$
3. La X_1, \dots, X_n vere uavhengige stokastiske variable med momentgenererende funksjonar $M_{X_1}(t), \dots, M_{X_n}(t)$ og la $Y = X_1 + \dots + X_n$. Då er

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t) \cdots M_{X_n}(t).$$

Lineærkombinasjon av normalfordelte SV

Teorem 7.11

La X_1, \dots, X_n vere uavhengige og normalfordelte stokastiske variable med $E(X_i) = \mu_i$ og $Var(X_i) = \sigma_i^2$. La

$$Y = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n.$$

Då er Y normalfordelt med

$$\mu_Y = a_1 \mu_1 + \dots + a_n \mu_n$$

og

$$\sigma_Y^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2.$$

Ordningsvariable

Definisjon

La X_1, \dots, X_n vere uavhengige og identisk fordelte SV med fordeling $f_X(x)$ og kumulativ fordeling $F_X(x)$. Sorter X_1, \dots, X_n og la resultatet vere

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}.$$

Fordelinga til $V = X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ er:

$$f_V(v) = n[F_X(v)]^{n-1} f_X(v).$$

Fordelinga til $U = X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ er:

$$f_U(u) = n[1 - F_X(u)]^{n-1} f_X(u).$$

Neste veke



- Me er no halvvegs i emnet og vil starte på statistisk inferens neste veke