Forelesing 21
Meir om konfidensintervall

Torstein Fjeldstad
Institutt for matematiske fag, NTNU
20.03.2018

I dag

- Einsidige konfidensintervall
- Prediksjonsintervall
- Parvise observasjonar

Utledning av konfidensintervall

Situasjon: Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfeldig utval frå $f(x;\theta)$-populasjonen. Ynskjer eit $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall for θ.

1. Finn ein estimator for θ, $\hat{\theta}$ (t.d. SME)
2. La $Z = h(\hat{\theta}, \theta)$ der $h(\cdot,\cdot)$ er ein funksjon s.a. Z har ei kjend fordeling.
3. Då har me at

$$P(z_{1-\alpha/2} \leq h(\hat{\theta}, \theta) \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

4. Løys ulikskapane (mhp. θ) kvar for seg og finn eit uttrykk med θ i midten

$$P(\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \theta \leq \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = 1 - \alpha$$

5. Et $(1-\alpha)\cdot 100$ % konfidensintervall for θ er

$$\left[\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \ldots, X_n), \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right]$$

Einsidig konfidensintervall

Situasjon: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfeldig utval med $X_i \sim n(x_i; \mu, \sigma)$ der σ er kjend. Dei einsidige $(1-\alpha)100\%$ konfidensgrensene er

$$\text{øvre grense:} \qquad \bar{x} + z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

$$\text{nedre grense:} \qquad \bar{x} - z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

Prediksjonsintervall

Situasjon: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfeldig utval med $X_i \sim n(x_i; \mu, \sigma)$ der σ er kjend og μ ukjend. La $X_0 \sim n(x_0; \mu, \sigma)$ vere ei framtidig måling, uavhengig av $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

— Ynskjer eit $(1-\alpha)100\%$ prediksjonsintervall for X_0

— Estimator for μ, $\hat{\mu} = \bar{X}$

— Start med

$$\bar{X} - X_0 \sim n\left(z; 0, \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \sigma^2}\right)$$

— Observator

$$Z = \frac{\bar{X} - X_0}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n}+1\right)}} \sim n(z; 0, 1)$$

— $(1-\alpha)100\%$ prediksjonsintervall for X_0

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n}+1\right)}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n}+1\right)}\right]$$

Skilnad konfidensintervall og prediksjonsintervall

Konfidensintervall:

$$P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Prediksjonsintervall:

$$P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n} + 1\right)} \leq X_0 \leq \bar{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n} + 1\right)}\right) = 1 - \alpha$$

I morgon

— Hypotesetesting