



Forelesing 27

Oppsummering

Torstein Fjeldstad

Institutt for matematiske fag, NTNU

18.04.2018

I dag



- Lineær regresjon (sjekk av modellantagelser)
- Praktisk informasjon
- Andre statistikk-kurs
- Oversikt over pensum

Eksamen



- Onsdag 23.05 kl. 09:00 - 13:00
- Alle deloppgåver tel like mykje (men dei er ikkje like vanskelege)
- Ta med naturlege mellomrekningar. Merk det er skilnad på "skriv opp" og "utlei"

Tillate hjelpemidler på eksamen



- Tabeller og formler i statistikk
- Bestemd, enkel kalkulator
- Stempla gult A5-ark med egne handskrivne formlar og notat (du kan skrive på begge sider av arket)

Korleis førebu seg føre eksamen



- Kræsjkurs: tysdag 15.05 i R1 (tidspunkt er ikkje endeleg bestemd)
- Eksamenslab:
 - Onsdag 09.05 kl. 13:00 - 16:00 i S1
 - Måndag 14.05 kl. 13:00 - 16:00 i S2
 - Onsdag 16.05 kl. 13:00 - 16:00 i S2
 - Tysdag 22.05 kl. 13:00 - 16:00 i S2
- Gamle eksamensoppgåver er god trening

Naturlege neste kurs i statistikk



1. TM4265 Stokastisk modellering (H2018)
 - sannsynsrekning
 - rekne på prosesser som utviklar seg i tid
2. TMA4255 Anvendt statistikk (V2019)
 - statistisk inferens
 - multippel lineær regresjon, forsøksplanlegging
3. TMA4267 Lineære statistiske modeller (V2019)
 - Som TMA4255, men noko meir matematisk
4. TMA4268 Statistisk læring (V2019)
 - Regresjon, ikkje-linearitet, klassifikasjon
 - Fokus på programmering i R



DEL 1: Sannsynsrekning

Sannsyn

Stokastisk forsøk : eit eksperiment der resultatet er underlagt tilfeldigheter,

Utfallsrom S : mengda av moglege resultat i eit stokastisk forsøk.

Utfall x : eit element i utfallsrommet S .

Ein **sannsynsmål** på eit utfallsrom S er ein reell funksjon definert på hendingane i S slik at:

- $0 \leq P(A) \leq 1$ for alle $A \subset S$.
- $P(S) = 1$
- Dersom A_1, A_2, \dots er parvis disjunkte (dvs. $A_i \cap A_j = \emptyset$ for alle $i \neq j$), så er

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Reknerreglar for sannsyn

Additiv regel: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Komplementærsetninga: $P(A) = 1 - P(A^c)$

Betinga sannsyn: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Multiplikasjonssetninga: $P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$

Uavhengighet: A, B uavhengige $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Bayes regel: $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$

Lova om total sannsyn: B_1, B_2, \dots, B_n partisjon av S

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$$

Stokastiske variabel og sannsynsfordeling



Ein stokastisk variabel er ein reell funksjon, X , definert på eit utfallsrom.

Eigenskapar til X :

- $f(x)$ $\left\{ \begin{array}{ll} \text{punktsannsyn} & \text{diskret} \\ \text{sannsynstettleik} & \text{kontinuerleg} \end{array} \right.$
- $F(x) = P(X \leq x)$ same tolkning for både diskret og kontinuerleg tilfelle

Forventningsverdi og varians

- Forventningsverdi (tolkning: gjennomsnitt av uendelig mange realisasjoner)

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_x g(x)f(x) & \text{diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx & \text{kontinuerleg} \end{cases}$$

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$$

- Varians (tolkning: måler spredning/variasjon)

$$\text{Var}(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

- Kovarians (tolkning: kan tolke forteiknet)

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

$$X, Y \text{ uavhengige} \Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0$$

Lineærkombinasjoner

La $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b$. Da er

$$E(Y) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) + b,$$

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j).$$



Kombinatorikk

$n!$ = $1 \cdot 2 \cdots n$ er antall måter å permutere (ordne) n elementer.

${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!} = n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)$ er antall ordnede utvalg når r elementer velges blant n uten tilbakelegging.

$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{{}_n P_r}{r!} = {}_n C_r$ er antall ikke-ordnede utvalg når r elementer velges blant n uten tilbakelegging.

Viktig diskrete fordelingar

Binomisk fordeling: Trekning frå urne **med** tilbakelegging

- n uavhengige forsøk
- suksess eller fiasko i kvart forsøk med konstant sannsyn for suksess p
- X er talet på suksessar

Multinomisk fordeling: Som binomisk, men k moglege utfall i kvart forsøk

Hypergeometrisk fordeling: Trekning frå urne **utan** tilbakelegging

- N kuler totalt, k raude og $N - k$ gule. X er talet på raude du trekk

Negativ binomisk fordeling: same situasjon som for binomisk, men trekk inntil k suksessar ($k = 1$ gir geometrisk fordeling). X er talet på trekningar

Poissonfordeling: X er talet på hendingar på intervallet $[0, t]$ i ein poissonprosess

1 Noen diskrete sannsynlighetsfordelinger

Binomisk fordeling

$$f(x) = b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

$$E(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1-p), \quad M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n.$$

Poissonfordeling

$$f(x) = p(x; \mu) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$E(X) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \mu, \quad M_X(t) = e^{\mu(e^t - 1)}.$$

Hypergeometrisk fordeling

$$f(x) = h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 0, 1, \dots, \min(k, n).$$

$$E(X) = \frac{nk}{N}, \quad \text{Var}(X) = \frac{N-n}{N-1} \cdot n \cdot \frac{k}{N} \cdot \left(1 - \frac{k}{N}\right).$$

$M_X(t)$ har ikke et pent uttrykk.

Geometrisk fordeling

$$f(x) = g(x; p) = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots$$

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}, \quad M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t} \text{ for } t < -\ln(1-p).$$

Negativ-binomisk fordeling

$$f(x) = b^*(x; k, p) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}, \quad x = k, k+1, \dots$$

$$E(X) = \frac{k}{p}, \quad \text{Var}(X) = k \frac{1-p}{p^2}, \quad M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t} \right)^k \text{ for } t < -\ln(1-p).$$

Spesialtilfelle: $k = 1$ gir geometrisk fordeling.

Binomisk fordeling

$$P(X \leq x)$$

n	x	p											
		.05	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80	90
2	0	.902	.810	.722	.640	.562	.490	.360	.250	.160	.090	.040	.010
	1	.998	.990	.978	.960	.938	.910	.840	.750	.640	.510	.360	.190
3	0	.857	.729	.614	.512	.422	.343	.216	.125	.064	.027	.008	.001
	1	.993	.972	.939	.896	.844	.784	.648	.500	.352	.216	.104	.028
	2	1.000	.999	.997	.992	.984	.973	.936	.875	.784	.657	.488	.271
4	0	.815	.656	.522	.410	.316	.240	.130	.062	.026	.008	.002	.000
	1	.986	.948	.890	.819	.738	.652	.475	.313	.179	.084	.027	.004
	2	1.000	.996	.988	.973	.949	.916	.821	.688	.525	.348	.181	.052
	3	1.000	1.000	.999	.998	.996	.992	.974	.938	.870	.760	.590	.344
5	0	.774	.590	.444	.328	.237	.168	.078	.031	.010	.002	.000	.000
	1	.977	.919	.835	.737	.633	.528	.337	.187	.087	.031	.007	.000
	2	.999	.991	.973	.942	.896	.837	.683	.500	.317	.163	.058	.009
	3	1.000	1.000	.998	.993	.984	.969	.913	.813	.663	.472	.263	.081
	4	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.998	.990	.969	.922	.832	.672	.410
6	0	.735	.531	.377	.262	.178	.118	.047	.016	.004	.001	.000	.000
	1	.967	.886	.776	.655	.534	.420	.233	.109	.041	.011	.002	.000
	2	.998	.984	.953	.901	.831	.744	.544	.344	.179	.070	.017	.001
	3	1.000	.999	.994	.983	.962	.930	.821	.656	.456	.256	.099	.016
	4	1.000	1.000	1.000	.998	.995	.989	.959	.891	.767	.580	.345	.114
	5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.984	.953	.882	.738	.469
7	0	.698	.478	.321	.210	.133	.082	.028	.008	.002	.000	.000	.000
	1	.956	.850	.717	.577	.445	.329	.159	.063	.019	.004	.000	.000
	2	.996	.974	.926	.852	.756	.647	.420	.227	.096	.029	.005	.000
	3	1.000	.997	.988	.967	.929	.874	.710	.500	.290	.126	.033	.003
	4	1.000	1.000	.999	.995	.987	.971	.904	.773	.580	.353	.148	.026
	5	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.981	.938	.841	.671	.423	.150
	6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.992	.972	.918	.790	.522
8	0	.663	.430	.272	.168	.100	.058	.017	.004	.001	.000	.000	.000
	1	.943	.813	.657	.503	.367	.255	.106	.035	.009	.001	.000	.000
	2	.994	.962	.895	.797	.679	.552	.315	.145	.050	.011	.001	.000
	3	1.000	.995	.979	.944	.886	.806	.594	.363	.174	.058	.010	.000
	4	1.000	1.000	.997	.990	.973	.942	.826	.637	.406	.194	.056	.005
	5	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.989	.950	.855	.685	.448	.203	.038
	6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.991	.965	.894	.745	.497	.187
	7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.983	.942	.832	.570

Viktige kontinuerlege fordelingar



Normalfordeling: $X \sim n(x; \mu, \sigma)$

- lineærkombinasjon av uavhengige normalfordelte stokastiske variabler er normalfordelt
- $X \sim n(x; \mu, \sigma) \Leftrightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim n(z; 0, 1)$

Eksponensialfordeling: X tid til første hending/tid mellom etterfølgande hendingar i ein poissonprosess

2 Noen kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger

Normalfordeling (Gaussfordeling)

$$f(x) = n(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty.$$

$$E(X) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2, \quad M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2 / 2}.$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

Eksponentialfordeling

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, \quad x \geq 0.$$

$$E(X) = \beta, \quad \text{Var}(X) = \beta^2, \quad M_X(t) = \frac{1}{1 - \beta t} \text{ for } t < \frac{1}{\beta}.$$

Kommentar: Ofte vanlig å bruke parameteren $\lambda = 1/\beta$.

Standard normalfordeling

$$\Phi(z) = P(Z \leq z)$$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.7	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001
-3.6	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001
-3.5	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
-.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
-.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
-.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
-.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

Kritiske verdier i standard normalfordelingen

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha$$

α	z_α
.2	0.842
.15	1.036
.1	1.282
.075	1.440
.05	1.645
.04	1.751
.03	1.881
.025	1.960
.02	2.054
.01	2.326
.005	2.576
.001	3.090
.0005	3.291
.0001	3.719
.00005	3.891
.00001	4.265
.000005	4.417
.000001	4.753

Transformasjon av stokastiske variabler



Situasjon: $X \sim f(x)$

Mål: finne fordelinga til $Y = u(X)$ (merk: $X = w(Y)$)

$$g(y) = \begin{cases} f(w(y)) & \text{diskret} \\ f(w(y))|w'(y)| & \text{kontinuerleg} \end{cases}$$

Nokre samanhenger mellom fordelingar



- Hypergeometrisk \approx binomisk dersom N er stor i forhold til k
- Binomisk \approx poisson viss n stor og p liten
- Binomisk \approx normal viss n stor

Ordningsvariabler

Situasjon: X_1, X_2, \dots, X_n tilfeldig utval med $X_i \sim f(x_i)$

Maksimum:

$$\begin{aligned} V &= \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ F_V(v) &= P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq v) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i \leq v) = (F_X(v))^n \end{aligned}$$

Minimum:

$$\begin{aligned} U &= \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ F_U(u) &= P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq u) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P(X_i \leq u)] = 1 - (1 - F_X(u))^n \end{aligned}$$

Momentgenererende funksjon



Definisjon: $M_X(t) = E(e^{tX})$

Reknerelgar:

- $M_{aX}(t) = M_X(at)$
- $M_{a+X}(t) = e^{at}M_X(t)$
- X_1, X_2, \dots, X_n uavhengige

$$M_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) \dots M_{X_n}(t)$$

Egenskapar:

- $M_X^{(r)}(0) = E(X^r)$
- Fordelinga til X og Y er like viss $M_X(t) = M_Y(t)$ for alle t



DEL 2: Statistikk

Sentralgrenseteoremet



Viss \bar{X} er gjennomsnittet av eit tilfeldig utval av storleik n tatt frå ein populasjon med forventningsverdi μ og varians $\sigma^2 < \infty$ vil

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow n(z; 0, 1) \quad \text{når } n \rightarrow \infty.$$

Estimator



Situasjon: X_1, X_2, \dots, X_n tilfeldig utval med $X_i \sim f(x_i; \theta)$

Mål: ynskjer å anslå verdien til θ (og seie noko om tilhøyrande uvisse)

Observator: funksjon av stokastiske variablar

Estimator: ein observator $\hat{\theta}$ som nyttes til å estimere verdien til den ukjende parameteren θ

Sannsynsmaksimering



Situasjon: X_1, X_2, \dots, X_n tilfeldig utval $X_i \sim f(x_i; \theta)$

1. Definer rimelighetsfunksjonen

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

2. Ofte er det enklare å sjå på log-rimelighetsfunksjonen

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i; \theta)$$

3. Maksimer $l(\theta)$ (ofte ved å derivere og setje lik null)

Egenskapar til estimatorar



- Ynskjer ein forventningsrett (eng: unbiased) estimator

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

- For to forventningsrette estimatorar $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ vil me velge den med lågast varians:

$$\text{Var}(\hat{\theta}_1) < \text{Var}(\hat{\theta}) \Rightarrow \text{velg } \hat{\theta}_1$$

χ^2 -fordeling (kvikvadratfordeling)

$$f(x) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2-1} e^{-x/2}, \quad x \geq 0, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

$$E(X) = \nu, \quad \text{Var}(X) = 2\nu, \quad M_X(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\nu/2} \text{ for } t < \frac{1}{2}.$$

Kommentar: Dersom X_1, \dots, X_n er uafhængige og normalfordelte med forventning μ og varians σ^2 har vi at

$$\sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \text{ er } \chi^2\text{-fordelt med } n \text{ frihedsgrader,}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \text{ er } \chi^2\text{-fordelt med } n-1 \text{ frihedsgrader,}$$

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ og } \bar{X} \text{ er uafhængige.}$$

t -fordeling (Student t -fordeling)

$$f(x) = \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$E(X) = 0 \text{ hvis } \nu \geq 2, \quad \text{Var}(X) = \frac{\nu}{\nu-2} \text{ hvis } \nu \geq 3, \quad M_X(t) \text{ eksisterer ikke.}$$

Spesialtilfeller: $\nu = 1$ gir Cauchyfordelingen.
 $\nu = \infty$ gir Normalfordelingen.

Kommentar: Dersom Z er standard normalfordelt og V er χ^2 -fordelt med ν frihedsgrader og Z og V er uafhængige, har vi at

$$\frac{Z}{\sqrt{V/\nu}} \text{ er } t\text{-fordelt med } \nu \text{ frihedsgrader.}$$

Spesielt gir dette at dersom X_1, \dots, X_n er uafhængige og normalfordelte med forventning μ og varians σ^2 har vi at

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \text{ er } t\text{-fordelt med } n-1 \text{ frihedsgrader,}$$

$$\text{der } S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$



Fordeling til lineærkombinasjoner

La X_1, \dots, X_n være uavhengige variabler.

Dersom X_i er normalfordelt med forventning μ_i og varians σ_i^2 vil $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ være normalfordelt med forventning $\sum_{i=1}^n a_i \mu_i$ og varians $\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2$.

Dersom X_i er binomisk fordelt med parametre m_i og p vil $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ være binomisk fordelt med parametre $\sum_{i=1}^n m_i$ og p .

Dersom X_i er Poissonfordelt med parameter μ_i vil $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ være Poissonfordelt med parameter $\sum_{i=1}^n \mu_i$.

Dersom X_i er χ^2 -fordelt med ν_i frihetsgrader vil $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ være χ^2 -fordelt med $\sum_{i=1}^n \nu_i$ frihetsgrader.

Konfidensintervall



Situasjon: X_1, X_2, \dots, X_n tilfeldig utval $X_i \sim f(x_i; \theta)$

Mål: ynskjer konfidensintervall $[\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \dots, X_n), \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \dots, X_n)]$
slik at

$$P(\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \theta \leq \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \dots, X_n)) = 1 - \alpha$$

Generell framgangsmåte for konfidensintervall

1. Estimator for θ , $\hat{\theta}$ (t.d. SME)
2. La $Z = h(\hat{\theta}, \theta)$ der $h(\cdot, \cdot)$ er ein funksjon s.a. Z har ei kjend fordeling.
3. Har då

$$P(z_{1-\alpha/2} \leq h(\hat{\theta}, \theta) \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

4. Løys ulikskapane (mhp. θ) kvar for seg og finn eit uttrykk med θ i midten

$$P(\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \theta \leq \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \dots, X_n)) = 1 - \alpha$$

5. Et $(1 - \alpha) \cdot 100$ % konfidensintervall for θ er

$$\left[\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \dots, X_n), \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \dots, X_n) \right]$$

Hypotesetesting



	H ₀ riktig	H ₁ riktig
Forkast H ₀	Type I-feil	Ok
Ikkje forkast H ₀	Ok	Type II-feil

Ide: vi må vere "sikre" før me påstår at H₁ er rett. Me velg signifikansnivået α liten og krev

$$P(\text{Type I-feil}) = P(\text{Forkast } H_0 \text{ når } H_0 \text{ er riktig}) \leq \alpha$$

$$\beta = P(\text{Type II-feil}) = P(\text{Ikkje forkast } H_0 \text{ når } H_1 \text{ er riktig})$$

Generell framgangsmåte

Situasjon: X_1, X_2, \dots, X_n tilfeldig utval med $X_i \sim f(x_i; \theta)$.

1. Ynskjer å teste:

a) $H_0 : \theta = \theta_0$ mot $H_1 : \theta > \theta_0$

b) $H_0 : \theta = \theta_0$ mot $H_1 : \theta < \theta_0$

c) $H_0 : \theta = \theta_0$ mot $H_1 : \theta \neq \theta_0$

2. Estimator for θ ; $\hat{\theta}$

3. La $Z = h(\hat{\theta}, \theta_0)$, der $h(\cdot, \cdot)$ er ein funksjon s.a. Z har ei kjend fordeling under H_0

4. Bestem eit forkastningskriterium (antar Z stor når $\hat{\theta}$ stor)

a) Forkast H_0 dersom $Z > k$

b) Forkast H_0 dersom $Z < k$

c) Forkast H_0 dersom $Z < k_l$ eller $Z > k_u$

der k bestemmes frå kravet

$$P(\text{Forkast } H_0 \text{ når } H_0 \text{ er riktig}) \leq \alpha$$

5. Sett inn tal og konkluder



p -verdi

Ein p -verdi er det lågaste signifikansnivået α slik at observert verdi for observatoren gjev at me skal forkaste H_0 . Det vil seie, forkast H_0 dersom p -verdien er *mindre* enn α .

Teststyrke

Styrken til ein test er sannsynet for å forkaste H_0 gitt at ein spesifikk alternativ hypotese er sann.

H_0	Value of Test Statistic	H_1	Critical Region
$\mu = \mu_0$	$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}; \sigma \text{ known}$	$\mu < \mu_0$	$z < -z_\alpha$
		$\mu > \mu_0$	$z > z_\alpha$
		$\mu \neq \mu_0$	$z < -z_{\alpha/2}$ or $z > z_{\alpha/2}$
$\mu = \mu_0$	$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}; v = n - 1,$ $\sigma \text{ unknown}$	$\mu < \mu_0$	$t < -t_\alpha$
		$\mu > \mu_0$	$t > t_\alpha$
		$\mu \neq \mu_0$	$t < -t_{\alpha/2}$ or $t > t_{\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}};$ $\sigma_1 \text{ and } \sigma_2 \text{ known}$	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$	$z < -z_\alpha$
		$\mu_1 - \mu_2 > d_0$	$z > z_\alpha$
		$\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$z < -z_{\alpha/2}$ or $z > z_{\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{s_p \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}};$ $v = n_1 + n_2 - 2,$ $\sigma_1 = \sigma_2 \text{ but unknown,}$ $s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$	$t < -t_\alpha$
		$\mu_1 - \mu_2 > d_0$	$t > t_\alpha$
		$\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$t < -t_{\alpha/2}$ or $t > t_{\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$t' = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}};$ $v = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}};$ $\sigma_1 \neq \sigma_2 \text{ and unknown}$	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$	$t' < -t_\alpha$
		$\mu_1 - \mu_2 > d_0$	$t' > t_\alpha$
		$\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$t' < -t_{\alpha/2}$ or $t' > t_{\alpha/2}$
$\mu_D = d_0$ paired observations	$t = \frac{\bar{d} - d_0}{s_d/\sqrt{n}};$ $v = n - 1$	$\mu_D < d_0$	$t < -t_\alpha$
		$\mu_D > d_0$	$t > t_\alpha$
		$\mu_D \neq d_0$	$t < -t_{\alpha/2}$ or $t > t_{\alpha/2}$

Lineær regresjon



Situasjon: observert $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

Modell:

$$Y_i | x_i \sim n(y_i; \alpha + \beta x_i, \sigma)$$

Kan tilpasse α, β, σ

- Minste kvadraters metode (kun α, β)
- Sannsynsmaksimering

La Y_1, \dots, Y_n være uavhengige variabler med samme varians σ^2 og forventningsverdier

$$E(Y_i) = \alpha + \beta x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Minste kvadratsumsestimatorene for α og β er da

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) Y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{x},$$

og en forventningsrett estimator for σ^2 er gitt ved

$$S^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i)^2.$$

Dersom i tillegg Y_1, \dots, Y_n er normalfordelte vil

$$\frac{(n-2)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i)^2$$

være χ^2 -fordelt med $n-2$ frihetsgrader. Det kan også vises at $(n-2)S^2/\sigma^2$ er uavhengig av $\hat{\alpha}$ og $\hat{\beta}$.

Prediksjon lineær regresjon



Merk at det er skilnad på følgande:

- Forventa respons $\mu_{Y|x_0}$
- Ein ny observasjon Y_0 (gitt x_0)