NTNU

Kunnskap for ei betre verd

Forelesing 19
Kji-kvadratfordelinga

Torstein Fjeldstad

Institutt for matematiske fag, NTNU

13.03.2018

I dag

- kji-kvadratfordelinga
- (Student) t-fordelinga

Utledning av konfidensintervall

Situasjon: Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfeldig utval frå $f(x;\theta)$-populasjonen. Ynskjer eit $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall for θ.

1. Finn ein estimator for θ, $\hat{\theta}$ (t.d. SME)
2. La $Z = h(\hat{\theta}, \theta)$ der $h(\cdot,\cdot)$ er ein funksjon s.a. Z har ei kjend fordeling.
3. Då har me at

$$P(z_{1-\alpha/2} \leq h(\hat{\theta}, \theta) \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

4. Løys ulikskapane (mhp. θ) kvar for seg og finn eit uttrykk med θ i midten

$$P(\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \theta \leq \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = 1 - \alpha$$

5. Et $(1-\alpha)\cdot 100$ % konfidensintervall for θ er

$$\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \ldots, X_n), \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Konfidensintervall når båe μ og σ er ukjend

Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfelding utval med $X_i \sim n(x_i; \mu, \sigma)$. Ynskjer konfidensintervall for μ, men no er og σ ukjend. Estimator for μ, $\hat{\mu} = \bar{X}$.

1. Når σ^2 er kjend har me

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim n(z; 0, 1)$$

2. Erstatt σ^2 med følgjande estimator:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2.$$

   Kva er fordelinga til

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}?$$

   Me starter med å finne fordelinga til S^2.

Utvalsfordelinga til S^2 (kap 8.5) I

Forventningsrett

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sigma^2$$

Utvalsfordelinga til S^2 (kap 8.5) II

Kji-kvadratfordeling (χ^2-fordeling)

Sannsynstettleiken til ein χ^2-fordelt variabel X er:

$$f(x;\nu) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\frac{\nu}{2})} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}.$$

Det kan visast at

$$E(X) = \nu \qquad \text{og} \qquad Var(X) = 2\nu.$$

Utvalsfordelinga til S^2 (kap 8.5) III

Kvadrat av standard normalfordelt variabel

La $X \sim n(x; 0, 1)$ og la $Y = X^2$. Då er $Y \sim \chi_1^2$ (kji-kvadratfordelt med parameter $\nu = 1$). Me kallar ν talet på fridomsgrader.

Lineærkombinasjon av χ^2-fordelte variablar

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vere uavhengige og kji-kvadratfordelte stokastiske variablar med høvevis $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ fridomsgrader. Då er

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

kji-kvadratfordelt med $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \ldots \nu_n$ fridomsgrader

Utvalsfordelinga til S^2 (kap 8.5) IV

Utvalsfordelinga til S^2

Dersom $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er uavhengige og $X_i \sim n(x_i; \mu, \sigma)$ er

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

og $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ og $\bar{X}$ er uavhengige.

(Student) t-fordeling

Definisjon

La $Z \sim n(z; 0, 1)$ og $V \sim \chi^2_\nu$ der Z og V er uavhengige. Då vil fordelinga

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{\nu}}}$$

ha sannsynstettleik

$$f(t; \nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \qquad -\infty < t < \infty.$$

Det kan visast at

$$E(T) = 0 \qquad \text{og} \qquad Var(T) = \frac{\nu}{\nu - 2}.$$

Neste veke

- (Student) t-fordelinga
- Konfidensintervall for σ^2 i normalfordelinga (μ ukjend)