NTNU

Kunnskap for ei betre verd

Forelesing 10
Diskrete fordelingar

Torstein Fjeldstad

Institutt for matematiske fag, NTNU

07.02.2018

I dag

- Geometrisk og negativ binomisk fordeling
- Poissonfordeling

Repetisjon I

Krav Bernoulli-prosess

1. n uavhengige forsøk
2. I kvart forsøk i har me suksess, $I_i = 1$, eller ikkje-suksess, $I_i = 0$
3. Sannsynet for suksess er konstant for alle n forsøka;
   $p = P(I_i = 1)$ for alle $i = 1, \dots, n$

Binomisk fordeling

La $X = \sum_{i=1}^{n} I_i$ vere talet på suksessar i ein Bernoulli-prosess. Då er X binomisk fordelt med

$$P(X = x) = b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}.$$

Repetisjon II

Krav multinomisk-prosess

1. n uavhengige forsøk
2. Kvart forsøk resulterar i nøyaktig ein av R kategoriar
3. Sannsynet for kvar kategori r er lik i kvart forsøk i:
   $P(\text{kategori } r) = p_r$

Multinomisk fordeling

Tala på utfall $X = (X_1, \ldots, X_R)$ i ein mulitnomisk-prosess er multinomisk fordelt med

$$f(x_1, \ldots, x_R; n, p_1, \ldots, p_R) = \binom{n}{x_1, \ldots, x_R} p_1^{x_1} \ldots p_R^{x_R}$$

der $\sum_{r=1}^{R} x_r = n$ og $\sum_{r=1}^{R} p_r = 1$.

Repetisjon III

Situasjon hypergeometrisk fordeling

- Urne med N kuler
- k blåe kuler (suksess)
- $N - k$ raude kuler (fiasko)
- Trekk n kuler (utan tilbakelegging)
- X er talet på dei trekte kulene som er blåe (talet på suksessar)

Hypergeometrisk fordeling

En hypergeometrisk stokastisk variabel X har fordeling

$$f(x; N, n, k) = h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Geometrisk fordeling

Geometrisk fordeling

Dersom me har uavhengig forsøk, kvar med suksessannsyn p, og lar X vere talet på forsøk til og med første suksess er X geometrisk fordelt med:

$$f(x;p) = g(x;p) = (1-p)^{x-1}p \qquad x = 1, 2, 3, \ldots$$

.

Negativ binomisk fordeling

Negativ binomisk fordeling

Dersom me har uavhengige forsøk, kvar med suksessannsyn p, og lar X vere talet på forsøk til og med k-te sukesess, så er X negativ binomisk fordelt med

$$f(x; k, p) = b^{\star}(x; k, p) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k} \qquad x = k, k+1, k+2, \ldots$$

Poissonfordelinga I

- Talet på hendingar som inntreff i eit tidsintervall er uavhengig av talet på hendingar som inntreff i disjunkte tidsintervall
- Sannsynet for at ei hending inntreff i eit kort tidsintervall er lineært med lengda på tidsintervallet, og uavhengig av om det inntreff hendingar før eller etter intervallet
- Sannsynet for at det inntreff meir enn ei hending innanfor eit lite tidsintervall er neglisjerbart

Merk: me kan byte ut tid med for eksempel distanse, areal, volum osb.

Poissonfordelinga II

Poissonfordelinga

La X vere talet på hendingar i eit tidsintervall av lengde t. X er poissonfordelt med

$$f(x; \lambda t) = p(x; \lambda t) = \frac{\exp(-\lambda t)(\lambda t)^x}{x!}$$

der λ er gjennomsnittleg tal på hendingar per tidseining.

Forventningsverdi og varians

For ein poissonfordelt stokastisk variabel X med parameter λt er:

$$E(X) = \lambda t \qquad \text{og} \qquad Var(X) = \lambda t.$$

Neste veke

- Kontinuerlege fordelingar