NTNU
Kunnskap for ei betre verd

Forelesing 17
Sannsynsmaksimeringsestimator

Torstein Fjeldstad
Institutt for matematiske fag, NTNU
06.03.2018

I dag

— Sannsynsmaksimeringsestimatoren

Repetisjon

Sentralgrenseteoremet

La X_i vere uavhengig identisk fordelte (u.i.f.) stokastiske variablar med $E(X_i) = \mu_X$ og $Var(X_i) = \sigma_X^2 < \infty$ for $i = 1, \ldots, n$. La $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Då vil fordelinga til

$$Z = \frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{SD(\bar{X}_n)} = \frac{\bar{X}_n - \mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}}$$

gå mot ei standard normalfordeling når $n \to \infty$.
Dette tilsvarar

$$\bar{X}_n \approx n\left(x; \mu_X, \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right).$$

Merk: Sjølv om X_i ikkje er normalfordelt vil $\bar{X}_n$ vere tilnærma normalfordelt når n er tilstrekkeleg stor (ofte nok med $n \geq 30$).

Sannsynsmaksimeringsestimator (SME) I

Forrige veke snakka me om (punkt)estimatorar $\hat{\theta}$, men desse blei ofte foreslått "ut av det blå".

Sannsynsmaksimeringsestimator (SME) I

Forrige veke snakka me om (punkt)estimatorar $\hat{\theta}$, men desse blei ofte foreslått "ut av det blå". I dag skal me sjå på ei oppskrift på korleis me kan foreslå ein estimator.

Sannsynsmaksimeringsestimator (SME) I

Forrige veke snakka me om (punkt)estimatorar $\hat{\theta}$, men desse blei ofte foreslått "ut av det blå". I dag skal me sjå på ei oppskrift på korleis me kan foreslå ein estimator.

Situasjon: Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfelding utval frå $f(x;\theta)$-populasjonen.
Mål: Definere ei oppskrift på korleis me kan nytte observerte verdiar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ til å finne ein estimator for θ, $\hat{\theta}$.

Sannsynsmaksimeringsestimator (SME) II

Oppskrift for å finne SME

1. Finn simultanfordelinga til $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \ldots f(x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$$

Sannsynsmaksimeringsestimator (SME) II

Oppskrift for å finne SME

1. Finn simultanfordelinga til $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \ldots f(x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$$

2. Definer rimelighetsfunksjonen (eng: likelihood function)

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$$

Sannsynsmaksimeringsestimator (SME) II

Oppskrift for å finne SME

1. Finn simultanfordelinga til $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \ldots f(x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$$

2. Definer rimelighetsfunksjonen (eng: likelihood function)

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$$

3. For å forenkle rekninga ser me ofte på log-rimelighetsfunksjonen

$$l(\theta) = \ln L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i; \theta)$$

Sannsynsmaksimeringsestimator (SME) II

Oppskrift for å finne SME

1. Finn simultanfordelinga til $X_1, X_2, \ldots, X_n$:
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \ldots f(x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$$
2. Definer rimelighetsfunksjonen (eng: likelihood function)
$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$$
3. For å forenkle rekninga ser me ofte på log-rimelighetsfunksjonen
$$l(\theta) = \ln L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i; \theta)$$
4. Maksimer (log-)likelihood mhp θ:
$$\hat{\theta}_{SME} = \text{arg max}_\theta L(\theta) = \text{arg max}_\theta \; l(\theta)$$

I morgon

— Konfidensintervall