TMA4245 Statistikk
Vår 2017

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Anbefalt øving 7

Denne anbefalte øvingen er tilpasset den delen av pensum som foreleses i syvende forelesningsuke. Oppgavene dreier seg om funksjoner av tilfeldige variable, samt momentgenererende funksjoner og ordningsvariable, som f.eks. maksimum og minimum av et utvalg.

Oppgave 1

Et forsikringsselskap regner med at utbetalingen X etter en industribrann er eksponensialfordelt, slik at sannsynlighetstettheten til X blir:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{hvis } x > 0, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

Selskapet er spesielt interessert i de høyeste utbetalingene, fordi de evt. vil reassurere i andre selskap. La X_1 og X_2 være to uavhengige utbetalinger.

a) Finn sannsynlighetstettheten til $V = \max(X_1, X_2)$. Finn $\mathrm{E}(V)$. Sammenlign med $\mathrm{E}(X)$ og $2\mathrm{E}(X)$ og kommenter.

La nå $V = \max\{X_1, \ldots X_n\}$. Fra deloppgave **a)** kan det vises at

$$F_V(v) = (1 - \exp(-\lambda v))^n \,.$$

Forsikringsselskapet Industri Forsikring AS vil undersøke risikoen sin. Utbetalingen X er gitt i millioner kroner. Fra de siste 10 årene har de erfart at $\lambda = 0.2$.

b) Lag et program som simulerer maksimum utbetaling for 8 uavhengige industribranner, det vil si:

1. Simuler 8 utbetalinger fra eksponentialfordelingen med $\lambda = 0.2$, og lagre den største verdien.
2. Gjenta dette 500 ganger og ta vare på den maksimale utbetalingen for hver iterasjon. Du kan bruke funksjonen `exprnd()` for å generere en tilfeldig verdi fra eksponentialfordelingen i Matlab.

Lag et histogram av maksimumsverdiene.

Plott den empiriske kumulative fordelingsfunksjonen sammen med den teoretiske og diskuter resultatet.

c) Anslå sannsynligheten for at den største utbetalingen er mer enn 30 millioner kroner ved å telle antall ganger $V > 30$ i simuleringene dine. Sammenlign resultatet med den teoretiske sannsynligheten.

d) Hva er forventet høyeste utbetaling for 8 branner?

I resten av oppgaven skal vi anta at Industri Forsikring AS har en egen konto på 30 millioner kroner til å dekke den høyeste utbetalingen for kommende år. Industri Forsikring AS ønsker å reassurere forsikringen i et annet selskap, men det andre selskapet godtar kun reassurering med sannsynlighet 2/3. Dersom det andre selskapet godtar reassurering koster det 5 millioner kroner som Industri Forsikring AS tar fra kontoen. Dersom de ikke får reassurert betaler de 0 kr.

Dersom de ikke får reassurert og $V > 30$ dekker Industri Forsikring AS utbetalingen ved å ta 25 millioner fra kontoen og låne det resterende beløpet. Uavhengig av hvor mye de må låne må de betale 5 millioner i låneomkostninger som trekkes fra kontoen. Anta at lånebeløpet i seg selv ikke har innvirkning på kontobeløpet. Dersom de ikke får reassurert og $V \leq 30$ vil de dekke utbetalingen fra egen konto. Dersom Industri Forsikring AS får reassurert vil de koste 5 millioner kroner som de tar fra kontoen. Eventuelle forsikringskrav vil da bli dekket av det andre selskapet.

e) Finn forventet beholdning på kontoen etter et år med 8 industribranner ved å simulere høyeste utbetaling 10000 ganger. Hint: funksjonen `randsample()` kan benyttes til å trekke fra sannsynlighetsfordelingen for reassurering.

Oppgave 2

X er kontinuerlig fordelt med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases},$$

og kumulativ fordeling

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Finn sannsynlighetsfordelingen til

a) $U = X - 2$

b) $V = -2X$

c) $W = X^2$

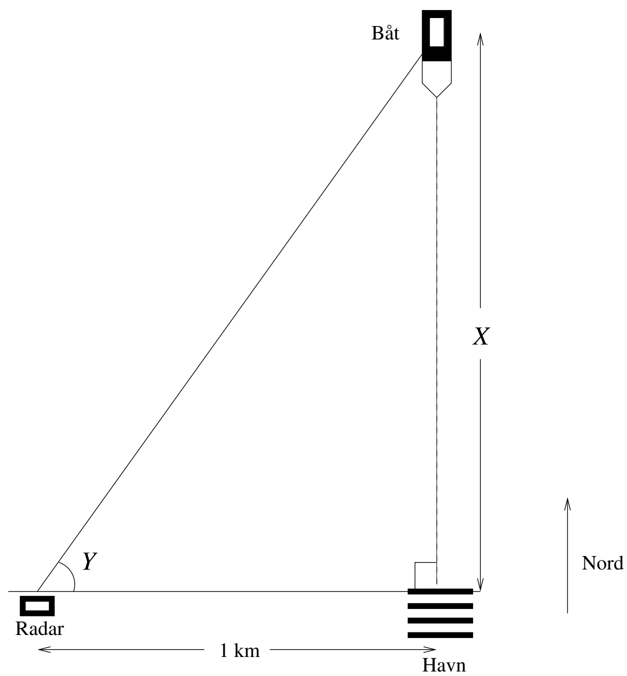
Hint: For å løse denne oppgaven kan du ta utgangspunkt i sannsynlighetstettheten til X og bruke formel for transformasjon av variabler i formelheftet. Alternativt kan du skrive ut kumulativ fordelingsfunksjon for U, V og W ved å bruke $F(x)$, og deretter derivere for å finne sannsynlighetstettheten. Vi anbefaler at du prøver ut begge fremgangsmåtene.

Oppgave 3

La $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Utled fordelingen til $Y = X/\sigma - \mu/\sigma$.

Oppgave 4

En havneby observerer ankommende skip ved å bruke radar. Vi antar for enkelhets skyld at skipene alltid ankommer fra nord. Radaren er plassert 1 kilometer vest for havna. Det er ønskelig å oppdage ankommende skip så tidlig som mulig av praktiske og sikkerhetsmessige årsaker. Når skipet første gang fanges inn på radaren, observerer radaren vinkelen $Y \in [0, \pi/2)$, som



Figur 1: Illustrasjon til oppgave 4.

vist i Figur 1. Radaren observerer kun vinkelen Y, og ikke avstanden til skipet. Vinkelen Y varierer fra skip til skip av mange årsaker.

La den kumulative fordelingsfunksjonen til Y være

$$F(y; \beta) = P(Y \leq y) = \frac{1 - \exp\{-y/\beta\}}{1 - \exp\{-\pi/(2\beta)\}}, \quad y \in [0, \pi/2),$$

der $\beta > 0$ er en parameter.

a) Anta bare i dette punktet at $\beta = \pi/8$.

Regn ut $\mathrm{P}\left(Y > \frac{\pi}{4}\right)$, $\mathrm{P}\left(\frac{\pi}{4} < Y < \frac{\pi}{3}\right)$ og $\mathrm{P}\left(Y > \frac{\pi}{4} \mid Y < \frac{\pi}{3}\right)$.

b) Vis at sannsynlighetstettheten $f(y; \beta)$ til Y er

$$f(y; \beta) = \frac{1}{\beta - \beta \exp\{-\pi/(2\beta)\}} \exp\{-y/\beta\}, \quad y \in [0, \pi/2).$$

Havnebyen er mer interessert i avstanden til havna når skipet først oppdages enn vinkelen Y som radaren observerer. La X betegne denne avstanden, som vist i Figur 1.

Utled et uttrykk for sannsynlighetstettheten til X.

Det oppgis at $\frac{d}{dx}(\tan(x)) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ og $\frac{d}{dx}(\text{arc}\tan(x)) = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{1 + x^2}$.

Fasit

1. $f(v) = 2\lambda(e^{-\lambda v} - e^{-2\lambda v}), \mathrm{E}(V) = 3/(2\lambda)$

4. **a**) 0.1192, 0.0671, 0.0708