TMA4245 Statistikk
Vår 2017

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Anbefalt øving 7

Denne anbefalte øvingen er tilpasset den delen av pensum som foreleses i syvende forelesningsuke. Oppgavene dreier seg om funksjoner av tilfeldige variable, samt momentgenererende funksjoner og ordningsvariable, som f.eks. maksimum og minimum av et utvalg.

Oppgave 1

Et forsikringsselskap regner med at utbetalingen X etter en industribrann er eksponensialfordelt, slik at sannsynlighetstettheten til X blir:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{hvis } x > 0, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

Selskapet er spesielt interessert i de høyeste utbetalingene, fordi de evt vil reassurere i andre selskap. La X_1 og X_2 være to uavhengige utbetalinger. Finn sannsynlighetstettheten til $V = \max(X_1, X_2)$. Finn $\mathrm{E}(V)$. Sammenlikn med $\mathrm{E}(X)$ og $2\mathrm{E}(X)$ og kommenter.

Oppgave 2

En havneby observerer ankommende skip ved å bruke radar. Vi antar for enkelhets skyld at skipene alltid ankommer fra nord. Radaren er plassert 1 kilometer vest for havna. Det er ønskelig å oppdage ankommende skip så tidlig som mulig av praktiske og sikkerhetsmessige årsaker. Når skipet første gang fanges inn på radaren, observerer radaren vinkelen $Y \in [0, \pi/2)$, som vist i Figur 1. Radaren observerer kun vinkelen Y, og ikke avstanden til skipet. Vinkelen Y varierer fra skip til skip av mange årsaker.

La den kumulative fordelingsfunksjonen til Y være

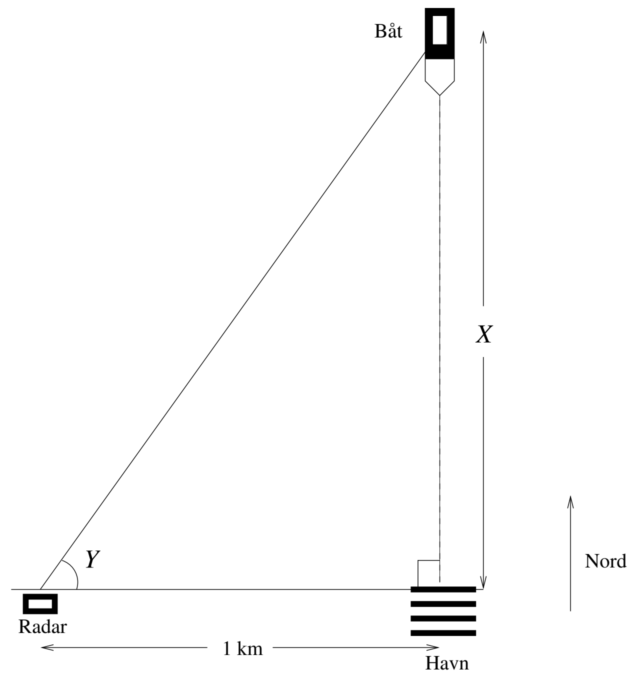
$$F(y; \beta) = P(Y \leq y) = \frac{1 - \exp\{-y/\beta\}}{1 - \exp\{-\pi/(2\beta)\}}, \quad y \in [0, \pi/2),$$

der $\beta > 0$ er en parameter.

a) Anta bare i dette punktet at $\beta = \pi/8$.
Regn ut $\mathrm{P}\left(Y > \frac{\pi}{4}\right)$, $\mathrm{P}\left(\frac{\pi}{4} < Y < \frac{\pi}{3}\right)$ og $\mathrm{P}\left(Y > \frac{\pi}{4} \mid Y < \frac{\pi}{3}\right)$.

b) Vis at sannsynlighetstettheten $f(y; \beta)$ til Y er

$$f(y; \beta) = \frac{1}{\beta - \beta \exp\{-\pi/(2\beta)\}} \exp\{-y/\beta\}, \quad y \in [0, \pi/2).$$



Figur 1: Illustrasjon til oppgave 2.

Havnebyen er mer interessert i avstanden til havna når skipet først oppdages enn vinkelen Y som radaren observerer. La X betegne denne avstanden, som vist i Figur 1.

Utled et uttrykk for sannsynlighetstettheten til X.

Det oppgis at $\frac{d}{dx}(\tan(x)) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ og $\frac{d}{dx}(\text{arc }\tan(x)) = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{1+x^2}$.

Oppgave 3

Anta at levetiden til en bestemt type elektroniske komponenter er eksponensialfordelt med forventningsverdi lik $1/\lambda$. Det finnes mange produsenter av denne typen elektroniske komponenter og kvaliteten på produktet varierer fra produsent til produsent. Dvs. de forskjellige produsentene har forskjellig parameterverdi λ og verdien på λ beskriver dermed gjennomgående kvalitet på komponenter fra den enkelte produsent. Anta videre at dersom en tilfeldig velger en produsent så kan en betrakte tilhørende λ som en kontinuerlig fordelt stokastisk variabel som er eksponensialfordelt med forventningsverdi $1/\theta$.

Anta at en kunde, som skal kjøpe en elektronisk komponent, går frem på følgende måte. Først velger han tilfeldig en produsent og deretter går han og kjøper en komponent produsert av denne produsenten. La T betegne levetiden for den komponenten kunden kjøper. Finn sannsynlighetsfordelingen for T.

Oppgave 4 Levetid for lyspærer — Eksamen august 2002, oppgave 3 av 3

To typer lyspærer, A og B, har levetider henholdsvis X og Y, der X og Y antas uavhengige.

Videre antas at X har sannsynlighetstetthet $f_1(x)$ og Y har sannsynlighetstetthet $f_2(y)$, der

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta_1} e^{-x/\beta_1} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad , \quad f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{\beta_2} e^{-y/\beta_2} & \text{for } y \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

og $\beta_1, \beta_2 > 0$.

a) Vis at forholdet mellom forventet levetid for pære A og forventet levetid for pære B er β_1/β_2.

La $U = X/Y$ være forholdet mellom levetidene og la $V = Y$.

b) Finn simultan sannsynlighetstetthet for U og V.

Vis at marginal sannsynlighetstetthet for U er

$$g(u) = \begin{cases} \frac{\beta_1 \beta_2}{(\beta_1 + \beta_2 u)^2} & \text{for } u \geq 0, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

c) Vis at $\mathrm{E}(U)$ er uendelig.

Oppgave 5

La $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Utled fordelingen til $Y = X/\sigma - \mu/\sigma$.

Fasit

1. $f(v) = 2\lambda(e^{-\lambda v} - e^{-2\lambda v}), \mathrm{E}(V) = 3/(2\lambda)$

2. **a**) 0.1192, 0.0671, 0.0708

3. $f(t) = \theta/(t+\theta)^2$