



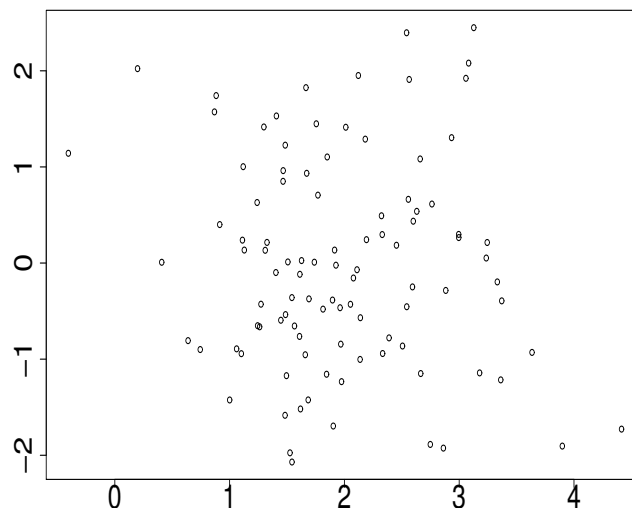
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet  
Institutt for matematiske fag

TMA4245 Statistikk  
Vår 2016

**Innlevering 2, blokk I**

Dette er den andre av to innleveringer i blokk 1. Denne øvingen skal oppsummere pensum forelest i uke 5-7. Øvingen handler om forventningsverdi, varians, kovarians og diskrete og kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger.

### Oppgave 1



Figur 1: Parvise data fra en simultanfordeling.

Figur 1 viser parvise utfall av to stokastiske variabler  $X$  (horisontalt) og  $Y$  (vertikalt).

a) Hva vil du anslå at korrelasjonen mellom  $X$  og  $Y$  er? Gi en kort begrunnelse.

Forventningsverdien og standardavviket for hver av de to variablene har heltallsverdier. Anslå disse verdiene ved å studere Figur 1 visuelt.

**Oppgave 2** På en maskin kan hver feil som oppstår klassifiseres som en av feiltypene A eller B. Sannsynligheten for feil av type A i løpet av en dag er  $p$ , mens sannsynligheten for feil av type B er  $2p$ . (Her er  $0 < p < \frac{1}{3}$ ). Dersom en feil oppstår i løpet av en dag blir maskinen

tatt ut av drift og reparert. Vi skal anta at den først er i drift igjen ved begynnelsen av neste dag, dvs. maskinen kan ha høyst en feil i løpet av en dag.

- a) Hva er sannsynligheten for at maskinen feiler på en bestemt dag? Dersom det er gitt at maskinen har feilet på en bestemt dag, hva er da sannsynligheten for at feilen er av type A?

Anta at maskinen har vært i drift i  $n$  dager og at maskinen hver av de  $n$  dagene feiler uavhengig av hva den har gjort de andre dagene. La nå  $X$  være antall feil av type A, og  $Z$  være antall feil (dvs. feil av både type A og B).

- b) Forklar hvorfor  $X$  er binomisk fordelt med parametre  $n$  og  $p$ . Forklar også hvorfor  $Z$  er binomisk fordelt. Hva er parametrene i denne fordelingen? Anta  $p = 0.05$ . Hva er da sannsynligheten for ingen feil av type A i løpet av 20 dager? Finn under de samme forutsetninger det forventede antall feil for samme tidsrom.
- c) Vi skal i punkt c) også gå ut fra at  $p = 0.05$ . De som eier maskinen regner med at reparasjonskostnadene  $V$  (i passende enheter) er gitt ved

$$V = \frac{3}{2}X + Y$$

der  $Y = Z - X$ . Finn forventede reparasjonskostnader i løpet av 20 dager. Kovariansen mellom  $X$  og  $Y$  er gitt ved  $-2np^2$ . Finn variansen til reparasjonskostnadene i løpet av 20 dager.

### Oppgave 3

Knut har ansvar for produksjon av et produkt i en større bedrift, og er opptatt av hvor mange meldinger om observerte produktfeil som kommer inn.

La  $X$  vere antall meldinger som kommer inn i et tidsrom av lengde  $t$ . Vi antar at meldingene kommer inn uavhengig av hverandre, og at  $X$  er poissonfordelt med parameter  $\lambda t$ ;

$$f(x; \lambda t) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} \exp(-\lambda t) \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Det er kjent at  $\lambda = 0.3$  meldinger / arbeidsdag.

- a) Hva er sannsynligheten for at det i et tidsrom på en dag ikke kommer inn noen meldinger om produktfeil?

Hva er sannsynligheten for at det i et tidsrom på tre dager kommer inn flere enn 4 slike meldinger?

- b) Knut er syk i tre dager. Når han kommer på jobb, er det kommet inn en melding om en produktfeil.

Hva er sannsynligheten for at meldinga kom inn den første dagen han var borte fra jobb? Grunngi svaret.

- c) Knut begynner på jobb når arbeidsuka starter.

Hva er fordelingen til tid til første hendelse i en Poisson-prosess? Hva er sannsynligheten for at første melding om produktfeil kommer før det har gått tre dager?

Hva er fordelingen til tid til andre hendelse i en Poisson-prosess? Hva er sannsynligheten for at andre melding om produktfeil kommer før det har gått en arbeidsuke (5 dager)?

#### Oppgave 4 Aksjekurser

Selskapet Agderfrukt er notert på børsen. Vi antar at endringen  $X$  i verdien på en Agderfrukt-aksje i løpet av en dag er normalfordelt med forventningsverdi  $\mu_X = 0.15$  kroner og standardavvik  $\sigma_X = 0.60$  kroner. Har du en aksje i Agderfrukt vil  $X > 0$  bety fortjeneste, mens  $X < 0$  er tap.

a) Hva er sannsynligheten for å tape penger i løpet av en dag, dvs.  $P(X < 0)$ ?

Hva er  $P(0 \leq X \leq 0.15)$ ?

Hvis du kjøper 10 aksjer i Agderfrukt idag og selger imorgen, hva er forventet fortjeneste? Finn også variansen til fortjenesten.

Selskapet Trønderfrukt er også notert på børsen. Vi kaller endringen på en Trønderfrukt-aksje i løpet av en dag for  $Y$ , der  $Y$  er normalfordelt med forventningsverdi  $\mu_Y = 0.15$  kroner og standardavvik  $\sigma_Y = 0.80$  kroner.

b) Vi ser på aksjekursendringen på den samme dagen for Agderfrukt og Trønderfrukt og antar i dette punktet at aksjekursendringene  $X$  og  $Y$  er uavhengige.

Idag er verdien til en Agderfrukt-aksje den samme som verdien til en Trønderfrukt-aksje. Vi ønsker å undersøke tre mulige strategier for aksjekjøp, der vi kjøper aksjer idag og selger imorgen.

i) Kjøp to aksjer i Agderfrukt.

ii) Kjøp en aksje i Agderfrukt og en aksje i Trønderfrukt.

iii) Kjøp to aksjer i Trønderfrukt.

Dersom du vil ha minst mulig risiko for investeringen din, hvilken av de tre investeringsstrategiene over vil du velge? Begrunn svaret.

Figuren viser utviklingen av aksjekursen til Agderfrukt (stiplet) sammen med aksjekursen til Trønderfrukt (heltrukket).

Kursendringen dag  $i$  for Agderfrukt kaller vi  $X_i$ , og vi antar at  $X_i$  er normalfordelt med forventning  $\mu_X = 0.15$  kroner og standardavvik  $\sigma_X = 0.60$  kroner.

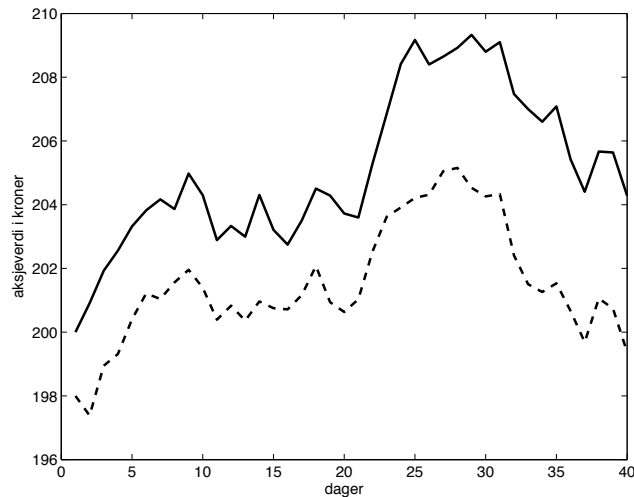
Kursendringen dag  $i$  for Trønderfrukt kaller vi  $Y_i$ , og vi antar at  $Y_i$  er normalfordelt med forventning  $\mu_Y = 0.15$  kroner og standardavvik  $\sigma_Y = 0.80$  kroner.

Kursendringer for ulike dager antas å være uavhengige.

Vi sammenlikner de to selskapene ved å måle differansen mellom de daglige kursendringene,  $D_i = X_i - Y_i$ , og ta gjennomsnitt. Vi ser på 10 dager og får  $\bar{D} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} D_i = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (X_i - Y_i)$ .

c) Gir figuren grunn til å tro at endringene i de to aksjekursene samme dag,  $X_i$  og  $Y_i$ , er uavhengige?

Korrelasjonen mellom  $X_i$  og  $Y_i$  for disse to selskapene,  $\rho(X_i, Y_i)$ , er enten -0.5, 0.0 eller 0.5. Hvilken av disse verdiene virker mest rimelig fra figuren? Begrunn kort.



Hva blir forventningsverdi og varians for  $\bar{D}$ ? Benytt verdien for korrelasjonen,  $\rho(X_i, Y_i)$ , som du valgte over.

### Oppgave 5

En entreprenør har leid inn et transportfirma til å transportere masse bort fra en byggeplass. Det er to mulige veivalg fra byggeplassen til stedet der massen skal deponeres, gjennom eller utenom bykjernen. Av helse, miljø og sikkerhetshensyn velger entreprenøren at massen skal transporteres utenom bykjernen.

Når oppdraget er ferdig har transportfirmaet kjørt 1000 turer, og transportfirmaet informerer entreprenøren om at av de 1000 turene har 5 blitt kjørt gjennom bykjernen og 995 er blitt kjørt utenom bykjernen.

I løpet av transportperioden har entreprenøren ved 5 tilfeldig valgte transporter sjekket om transporten har skjedd gjennom bykjernen. La  $X$  være antall ganger, av de 5 transportene som ble sjekket, entreprenøren finner at massen er blitt transportert gjennom bykjernen.

Hvilken fordeling har  $X$ ? Begrunn svaret.

Hvilken verdi av  $X$  har høyest punktsannsynlighet?

Nå viser det seg at entreprenøren fant at i 5 av de 5 tilfellene han sjekket så ble massen transportert gjennom bykjernen. Hva er sannsynligheten for dette, dvs.  $P(X = 5)$ ?

### Fasit

2. a)  $3p$ ,  $1/3$ , b)  $0.358$ , 3, c)  $3.5$ ,  $3.64$ .

3. a)  $0.7408, 0.0023$  b)  $1/3$  c)  $0.5934, 0.4422$

5.  $P(X = 5) = 1.21 \cdot 10^{-13}$