TMA4245 Statistikk
Vår 2016

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Innlevering 1, blokk I

Dette er den første innleveringen, og skal oppsumere pensum forelest i de tre første ukene av kurset. Oppgavene vil gi trening i å finne sannsynlighet for hendelser, og betinget sannsynlighet. Målet med denne øvingen er å få bedre forståelse for begrepene uavhengighet, disjunkte hendelser, simultan- og marginalfordeling.

Oppgave 1

I et lotteri er det 100 ulike lodd. Ett av loddene gir gevinst A, ett av loddene gir gevinst B, ett av loddene gir gevinst C og ett av loddene gir gevinst D. De 96 resterende loddene gir ingen gevinst. Per kjøper 4 lodd som han trekker tilfeldig (uten tilbakelegging).

a) Hvor mange ulike kombinasjoner av 4 lodd kan Per trekke?

I hvor mange av disse kombinasjonene vinner Per to gevinster?

b) Hva er sannsynligheten for at Per vinner minst en gevinst?

Hva er sannsynligheten for at han vinner gevinst A?

c) Per forteller at han vant gevinst A. Hva er sannsynligheten for at han også vant gevinst B?

Per forteller at han vant minst en gevinst. Hva er sannsynligheten for at han vant alle de fire gevinstene?

Oppgave 2

Noen mulige hendelser ved bygningene til NTNU ved årsskiftet 1999/2000 er følgende:

E=Tap av elektrisitetsforsyning
V=Tap av forsyning av vann
F=Tap av fjernvarme

En ekspertgruppe har kommet fram til følgende sannsynligheter for hendelsene. E og F: $P(E) = 0.05$, $P(F) = 0.05$ og $P(E \cap F) = 0.02$.

a) Er hendelsene E og F disjunkte? Er de uavhengige? Forklar.

b) Romtemperaturen i bygningane vil gå ned ved tap av elektrisitetsforsyning eller tap av fjernvarme. Uttrykk denne hendelsen, R, ved hjelp av E og F. Hva blir sannsynligheten for R?

c) Gitt at verken E eller F skjer, er sannsynligheten for V lik 0.07. Gitt at minst en av hendelsene E og F skulle skje, er sannsynligheten for V lik 0.50. Tegn et Venndiagram med alle de tre hendelsene. Finn sannsynligheten for hendelsen V.

Eventuelle iverksatte laboratorieforsøk blir avbrutt dersom minst en av hendelsene E, V og F skjer. Hva er sannsynligheten for at dette skjer?

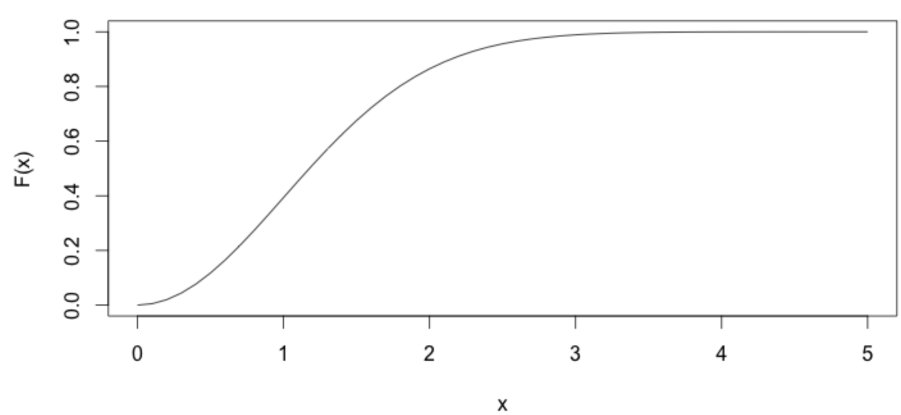
Oppgave 3

La den tilfeldige variabelen X beskrive i hvor lang tid en komponent har fungert i det den blir ødelagt. Vi kaller X for *levetiden* til komponenten.

Levetiden (målt i år), X, til en bestemt type mekaniske komponenter har vist seg å følge en fordeling med kumulativ fordelingsfunksjon gitt ved

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{x^2}{2\alpha}\right\} \quad ; \quad x > 0$$

der α er en parameter som beskriver kvaliteten til komponentene. Den kumulative fordelingsfunksjonen er vist i Figur 1, for tilfellet $\alpha = 1$. Fra figuren ser vi for eksempel at det svært sannsynlig at en komponent slutter å fungere i løpet av fem år.

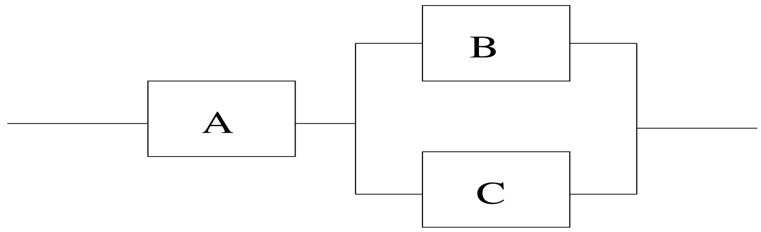


Figur 1: Kumulativ fordelingsfunksjon for levetid X

a) Bestem sannsynlighetstettheten til X.

Bestem for hvilken verdi av x sannsynlighetstettheten $f(x)$ tar sitt maksimum. Skisser $f(x)$.

Et instrument inneholder tre komponenter av denne typen, alle med samme kvalitetsparameter α. Vi refererer til de tre komponentene som komponenter A, B og C. Det antas at de tre komponentene svikter uavhengig av hverandre. Komponentene inngår i instrumentet slik at instrumentet kun vil fungere så lenge komponent A og minst en av komponentene B og C fungerer. Dette kan illustreres med følgende figur.



La følgende fire hendelser være definert:

A: Komponent A fungerer fremdeles etter to år.
B: Komponent B fungerer fremdeles etter to år.
C: Komponent C fungerer fremdeles etter to år.
D: Instrumentet fungerer fremdeles etter to år.

b) Tegn inn hendelsene A, B og C i et Venn-diagram.

Skraver hendelsen D i Venn-diagrammet.

For $\alpha = 1$, finn sannsynligheten for at instrumentet fremdeles fungerer etter to år.

Oppgave 4

La X og Y være diskret fordelte stokastiske variabler der $X, Y \in \{0, 1, 2\}$. La $f(x, y) = \mathrm{P}(X = x, Y = y)$ være simultan punktsannsynlighet for X og Y og anta at $f(x, y)$ er som angitt i følgende tabell.

$x \backslash y$	0	1	2
0	0.10	0.25	0.15
1	0.06	0.15	0.09
2	0.04	0.10	0.06

a) Finn $\mathrm{P}(X > Y)$.

Finn (marginal) punktsannsynlighet for X og for Y.

Er X og Y uavhengige? Begrunn svaret!

Oppgave 5 La simultantettheten til de kontinuerlige stokastiske variablene (X, Y) være gitt ved

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}xy & \text{if } 0 < x < y < 2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) Finn marginaltetthetene $g(x)$ og $h(y)$, og betinget tetthet $f(y|x)$.

b) Finn $P(Y > 1|X = \frac{1}{2})$.

Fasit

1. **a**) 3921225, 27360 **b**) 0.1528, 0.04 **b**) 0.0303, $1.669 \cdot 10^{-6}$

2. **b**) 0.08 **c**) $0.1044, 0.1444$

3. **a**) $\alpha^{1/2}$ **b**) 0.034

4. **a**) 0.2, X og Y er uavhengige

5. **b**) 0.8