



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4245 Statistikk
Vår 2016

Anbefalte oppgaver 7, blokk II

Denne anbefalte øvingen er tilpasset den delen av pensum som foreleses i syvende forelesningsuke. Oppgavene dreier seg om funksjoner av tilfeldige variable, samt momentgenererende funksjoner og ordningsvariable, som f.eks. maksimum og minimum av et utvalg.

Oppgave 1

Et forsikringselskap regner med at utbetalingen X etter en industribrann er eksponensialfordelt, slik at sannsynlighetstettheten til X blir:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{hvis } x > 0, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

Selskapet er spesielt interessert i de høyeste utbetalingene, fordi de evt vil reassurere i andre selskap. La X_1 og X_2 være to uavhengige utbetalinger. Finn sannsynlighetstettheten til $V = \max(X_1, X_2)$. Finn $E(V)$. Sammenlikn med $E(X)$ og $2E(X)$ og kommenter.

Oppgave 2

X er kontinuertlig fordelt med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases},$$

og kumulativ fordeling

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Finn sannsynlighetsfordelingen til

- a) $U = X - 2$
- b) $V = -2X$
- c) $W = X^2$

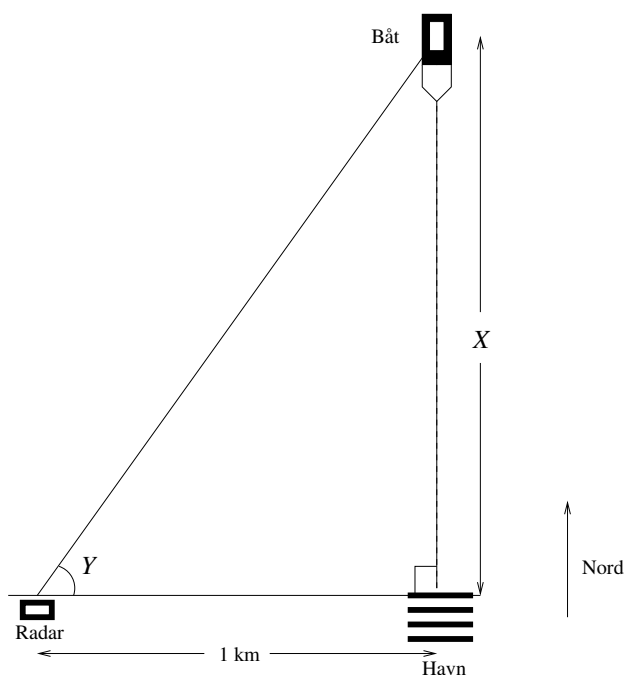
Hint: For å løse denne oppgaven kan du ta utgangspunkt i sannsynlighetstettheten til X og bruke formel for transformasjon av variable i formelheftet. Alternativt kan du skrive ut kumulativ fordelingsfunksjon for U , V og W ved å bruke $F(x)$, og deretter derivere for å finne sannsynlighetstettheten. Vi anbefaler at du prøver ut begge fremgangsmåtene.

Oppgave 3

La $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Utled fordelingen til $Y = X/\sigma - \mu/\sigma$.

Oppgave 4

En havneby observerer ankommende skip ved å bruke radar. Vi antar for enkelhets skyld at skipene alltid ankommer fra nord. Radaren er plassert 1 kilometer vest for havna. Det er ønskelig å oppdage ankommende skip så tidlig som mulig av praktiske og sikkerhetsmessige årsaker. Når skipet første gang fanges inn på radaren, observerer radaren vinkelen $Y \in [0, \pi/2)$, som



Figur 1: Illustrasjon til oppgave 4.

vist i Figur 1. Radaren observerer kun vinkelen Y , og ikke avstanden til skipet. Vinkelen Y varierer fra skip til skip av mange årsaker.

La den kumulative fordelingsfunksjonen til Y være

$$F(y; \beta) = P(Y \leq y) = \frac{1 - \exp\{-y/\beta\}}{1 - \exp\{-\pi/(2\beta)\}}, \quad y \in [0, \pi/2),$$

der $\beta > 0$ er en parameter.

a) Anta bare i dette punktet at $\beta = \pi/8$.

Regn ut $P\left(Y > \frac{\pi}{4}\right)$, $P\left(\frac{\pi}{4} < Y < \frac{\pi}{3}\right)$ og $P\left(Y > \frac{\pi}{4} \mid Y < \frac{\pi}{3}\right)$.

b) Vis at sannsynlighetstettheten $f(y; \beta)$ til Y er

$$f(y; \beta) = \frac{1}{\beta - \beta \exp\{-\pi/(2\beta)\}} \exp\{-y/\beta\}, \quad y \in [0, \pi/2).$$

Havnebyen er mer interessert i avstanden til havna når skipet først oppdages enn vinkelen Y som radaren observerer. La X betegne denne avstanden, som vist i Figur 1.

Utled et uttrykk for sannsynlighetstettheten til X .

Det oppgis at $\frac{d}{dx}(\tan(x)) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ og $\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{1+x^2}$.

Fasit

1. $f(v) = 2\lambda(e^{-\lambda v} - e^{-2\lambda v}), E(V) = 3/(2\lambda)$
4. a) 0.1192, 0.0671, 0.0708