TMA4245 Statistikk
Vår 2016

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Anbefalte oppgaver 7, blokk II
Løsningsskisse

Oppgave 1 Regner først ut den kumulative fordelingsfunksjonen til X:

$$F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x} \qquad \text{for} \qquad x > 0$$

Skal finne sannsynlighetstettheten til $V = \max(X_1, X_2)$ og regner først ut fordelingsfunksjonen:

$$\begin{aligned} F_V(v) = P(\max(X_1, X_2) \leq v) &= P(X_1 \leq v \cap X_2 \leq v) \\ &\overset{uavh}{=} P(X_1 \leq v)P(X_2 \leq v) \\ &= F_X(v)^2 = (1 - e^{-\lambda v})^2 = 1 - 2e^{-\lambda v} + e^{-2\lambda v} \end{aligned}$$

Dvs. sannsynlighetstettheten til V blir:

$$f_V(v) = F'(v) = \underline{\underline{2\lambda e^{-\lambda v} - 2\lambda e^{-2\lambda v}}}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(V) = \int_0^\infty v(2\lambda e^{-\lambda v} - 2\lambda e^{-2\lambda v}) dv &= 2\int_0^\infty v\lambda e^{-\lambda v} dv - \int_0^\infty v 2\lambda e^{-2\lambda v} dv \\ &= 2\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \underline{\underline{\frac{3}{2\lambda}}} \end{aligned}$$

Vi har at $\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$, dvs. vi har at $\underline{\underline{\mathrm{E}(X) < \mathrm{E}(V) < 2\mathrm{E}(X)}}$ som ventet da V er den største av to X-er. Siden $V = \max(X_1, X_2)$ vil vi forvente at $\mathrm{E}(V) > \mathrm{E}(X)$ og at $\mathrm{E}(V) < \mathrm{E}(X_1 + X_2) = 2\mathrm{E}(X)$.

Oppgave 2

X er kontinuerlig fordelt med sannsynlighetstetthet

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x\exp(-x^2) & x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Formel for transformasjon av variabler finnes i det blå heftet.

a) Vi har

$$U = X - 2 = g(X); x \geq 0$$

slik at

$$X = U + 2 = h(U)$$

med

$$h'(u) = 1.$$

Funksjonen $g(x) = x - 2$ er strengt monoton og deriverbar for alle x. Vi har dermed

$$\begin{aligned} f_U(\, u) &= f_X(\, h(u))\, |h'(u)| \\ &= 2\,(u+2)\, \exp(-\,(u+2)^2) \cdot 1 \\ &= 2\,(u+2)\, \exp(-\,(u+2)^2); u \geq -2. \end{aligned}$$

Alternativt kan vi ta utgangspunt i kumulativ fordeling. Vi skriver

$$\begin{aligned} F_U(u) = \mathrm{P}(U \leq u) &= \mathrm{P}(X - 2 \leq u) \\ &= \mathrm{P}(X \leq u + 2),\ u \geq -2. \end{aligned}$$

Dette gir

$$F_U(u) = F_X(u+2) = 1 - \exp\{-(u+2)^2\},\ u \geq -2.$$

Derivasjon mhp u gir riktig tetthetsfunksjon.

b) Vi har her

$$V = -2X = g(X); x \geq 0$$

der

$$X = -\tfrac{1}{2}V = h(V)$$

med

$$h'(v) = -\tfrac{1}{2}.$$

Funksjonen $g(x) = -2x$ er strengt monoton og deriverbar for alle x. Dette gir

$$\begin{aligned} f_V(\, v) &= f_X(\, h(v))\, |h'(\, v)| \\ &= 2\,(-\tfrac{1}{2}\, v)\, \exp(-\,(-\tfrac{1}{2}\, v)^2) \cdot \tfrac{1}{2} \\ &= -\tfrac{1}{2}\, v\, \exp(-\,(\tfrac{1}{2}\, v)^2); v \leq 0. \end{aligned}$$

Alternativt kan vi ta utgangspunt i kumulativ fordeling. Vi skriver

$$\begin{aligned} F_V(v) = \mathrm{P}(V \leq v) &= \mathrm{P}(-2X \leq v) \\ &= \mathrm{P}(X \geq -\frac{v}{2}) \\ &= 1 - \mathrm{P}(X \leq -\frac{v}{2}),\ v \leq 0. \end{aligned}$$

Dette gir

$$F_V(v) = 1 - F_X\left(-\frac{v}{2}\right) = \exp\{-\left(\frac{v}{2}\right)^2\},\ v \leq 0.$$

Derivasjon mhp v gir riktig tetthetsfunksjon.

c) Vi har

$$W = X^2 = g(X); x \geq 0$$

som gir

$$X = \sqrt{W} = h(W)$$

med

$$h'(w) = \frac{1}{2\sqrt{w}}.$$

Funksjonen $g(x) = x^2$ er strengt monoton og deriverbar for alle $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} f_W(\,w) &= f_X(\,h(\,w))\,|h'(\,w)| \\ &= 2\,\sqrt{w}\,\exp(\,-w)\tfrac{1}{2\sqrt{w}} \\ &= \exp(-w); w \geq 0. \end{aligned}$$

Alternativt kan vi ta utgangspunt i kumulativ fordeling. Vi skriver

$$\begin{aligned} F_W(w) = \mathrm{P}(W \leq w) &= \mathrm{P}(X^2 \leq w) \\ &= \mathrm{P}(|X| \leq \sqrt{w}) \\ &= \mathrm{P}(-\sqrt{w} \leq X \leq \sqrt{w}) \\ &= \mathrm{P}(X \leq \sqrt{w}) - \mathrm{P}(X \leq -\sqrt{w}) \\ &= \mathrm{P}(X \leq \sqrt{w}),\ w \geq 0. \end{aligned}$$

Dette gir

$$F_W(w) = F_X\left(\sqrt{w}\right) = 1 - \exp\{-w\},\ w \geq 0.$$

Derivasjon mhp w gir riktig tetthetsfunksjon.

Oppgave 3

Den stokastiske variabelen X er normalfordelt med forventningsverdi μ og varians σ^2,

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

og vi skal utlede sannsynlighetstetthetsfunksjonen til den stokastiske variabelen Y, som er gitt ved

$$Y = \frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Den kumulative sannsynlighetsfordelingen til Y er

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq y\right) = P(X \leq \mu + \sigma y) = F_X(\mu + \sigma y).$$

Derivasjon med hensyn på y gir sannsynlighetstettheten $f_Y(y)$,

$$\begin{aligned}
f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} &= \frac{d}{dy}F_X(\mu+\sigma y) \\
&= F_X'(\mu+\sigma y)\cdot\frac{d}{dy}(\mu+\sigma y) \\
&= f_X(\mu+\sigma y)\cdot\sigma \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}((\mu+\sigma y)-\mu)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}.
\end{aligned}$$

Dette er tettheten til normalfordelingen med $\mu = 0$ og $\sigma = 1$. Altså har vi at $Y \sim N(0,1)$.

Oppgave 4

a) Vi benytter den kumulative fordelingsfunksjonen i oppgaveteksten. Regner først ut sannsynligheten for generell verdi av β, for så å regne ut for $\beta = \pi/8$. Dette gir

$$\mathrm{P}(Y > \pi/4) = 1 - \mathrm{P}(Y \leq \pi/4) = 1 - \frac{1-\exp\left\{-\frac{\pi}{4\beta}\right\}}{1-\exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}} = \frac{\exp\left\{-\frac{\pi}{4\beta}\right\} - \exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}}{1-\exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}} = \underline{\underline{0.1192}}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\pi/4 < Y < \pi/3) = \mathrm{P}(Y < \pi/3) - \mathrm{P}(Y < \pi/4) &= \frac{1-\exp\left\{-\frac{\pi}{3\beta}\right\}}{1-\exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}} - \frac{1-\exp\left\{-\frac{\pi}{4\beta}\right\}}{1-\exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}} \\
&= \frac{\exp\left\{-\frac{\pi}{4\beta}\right\} - \exp\left\{-\frac{\pi}{3\beta}\right\}}{1-\exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}} = \underline{\underline{0.0671}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y > \pi/4 | Y < \pi/3) = \frac{\mathrm{P}(Y > \pi/4 \cap Y < \pi/3)}{\mathrm{P}(Y < \pi/3)} &= \frac{0.0671}{\left(1-\exp\left\{-\frac{\pi}{3\beta}\right\}\right) / \left(1-\exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}\right)} \\
&= \underline{\underline{0.0708}}.
\end{aligned}$$

b) Siden Y er en kontinuerlig, kan vi finne sannsynlighetstettheten ved å derivere den kumulative fordelingsfunksjonen i oppgaveteksten

$$\begin{aligned}
f(y;\beta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F(y;\beta) = \frac{1}{1-\exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}}\left(0 - \left(-\frac{1}{\beta}\right)\exp\left\{-\frac{y}{\beta}\right\}\right) &= \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{\beta - \beta\exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}}\exp\{-y/\beta\}}}
\end{aligned}$$

Fra figuren i oppgaveteksten har vi at $\tan(Y) = X$, altså har vi en-til-en relasjon mellom vinkelen Y og avstanden X. Det betyr at vi kan benytte transformasjon av variable (kap 7.2 i læreboka) til å finne fordelingen til X. La $y = \arctan(x) = w(x)$, altså den omvendte funksjonen av funksjonen over. Vi har da at sannsynlighetsfordelingen til X, $g(x;\beta)$, er gitt ved

$$g(x;\beta) = f(w(x);\beta) \cdot |w'(x)|.$$

Opplysningen i oppgaven eller oppslag i Rottmann gir at $w'(x) = 1/(1+x^2)$ som gir

$$g(x;\beta) = \underline{\underline{\frac{1}{\beta - \beta \exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}} \exp\left\{-\arctan(x)/\beta\right\} \cdot \frac{1}{1+x^2}, \quad x > 0.}}$$