Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4245 Statistikk
Vår 2016

Anbefalte oppgaver 6, blokk I
Løsningsskisse

Oppgave 1

Kommentar: Vi ser i denne oppgaven på IQ som en kontinuerlig variabel. I IQ-tester så oppgis IQ-score som heltall, og vi vil i bedømmelsen av besvarelsene ikke trekke i poeng hvis man har valgt å regne med heltallig IQ eller har lagt til en slags "kontinuitetskorreksjon", såfremt dette er begrunnet. Svarene man da kommer frem til avviker svært lite fra svarene som er oppgitt i denne løsningsskissen.

La X være IQ-score til tilfeldig valgt person. Vi har at X er normalfordelt med $\mathrm{E}(X) = 100$ og $\mathrm{Var}(X) = 15^2$.

Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt person skal få en IQ-score på minst 122?

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 122) &= 1 - P(X < 122) = 1 - P(X \leq 122) = 1 - P(\frac{X-100}{15} \leq \frac{122-100}{15}) \\
&= 1 - \Phi(1.47) = 1 - 0.9292 = \underline{\underline{0.0708}}
\end{aligned}
$$

Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt person skal få en IQ-score under 95?

$$
\begin{aligned}
P(X < 95) &= P(X \leq 95) = P(\frac{X-100}{15} \leq \frac{95-100}{15}) \\
&= \Phi(1.47) = 0.33 = \underline{\underline{0.3707}}
\end{aligned}
$$

Hvis vi tester et representativt utvalg på 270 personer, hva er da forventet antall personer som får en IQ-score på minst 122?

Dette er en binomisk situasjon med $n = 270$ og $p = 0.0708$. Forventet antall personer med IQ-score på minst 122 blir $n \cdot p = 270 \cdot 0.0708 = \underline{\underline{19.2}}$. Vi forventer at rundt 19 personer får en IQ-score på minst 122.

Oppgave 2 For eksponentialfordelingen har vi

$$\begin{aligned}
P(X \geq t+s|X>s) &= \frac{P(X \geq t+s \cap X>s)}{P(X>s)} \\
&= \frac{P(X>s|X \geq t+s)P(X \geq t+s)}{P(X>s)} \\
&= \frac{P(X \geq t+s)}{P(X>s)} \\
&= \frac{\lambda e^{-\lambda(t+s)}}{\lambda e^{-\lambda s}} \\
&= e^{-\lambda t} = \underline{\underline{P(X \geq t)}}.
\end{aligned}$$

For den geometriske fordelingen har vi, for en vilkårlig $a \in \{0,1,2,\ldots\}$,

$$\begin{aligned}
P(X \geq a) = \sum_{x=a}^{\infty} P(X=a) &= \sum_{x=a}^{\infty} p(1-p)^{x-1} = \sum_{x=a}^{\infty} pq^{x-1} \\
&= \sum_{x=a}^{\infty} (1-q)q^{x-1} = q^{a-1}(1-q)\sum_{x=a}^{\infty} q^{x-a} = q^{a-1}(1-q)\sum_{y=0}^{\infty} q^y \\
&= q^{a-1}(1-q)\frac{1}{1-q} = q^{a-1},
\end{aligned}$$

og vi får dermed

$$\begin{aligned}
P(X \geq t+s|X>s) &= \frac{P(X \geq t+s \cap X>s)}{P(X>s)} \\
&= \frac{P(X>s|X \geq t+s)P(X \geq t+s)}{P(X>s)} \\
&= \frac{P(X \geq t+s)}{P(X>s)} \\
&= \frac{q^{t+s-1}}{q^s} \\
&= q^{t-1} = \underline{\underline{P(X \geq t)}}.
\end{aligned}$$

Oppgave 3 Vi lar X være en bestemt pH-måling, og antar at X er normalfordelt med forventningsverdi $\mu = 6.8$ og varians $\sigma^2 = 0.060^2$. Sannsynligheten for at resultatet av målingen er under 6.74 er da

$$\begin{aligned}
P(X < 6.74) &= P(\frac{X-6.8}{0.06} < \frac{6.74-6.8}{0.06}) \\
&= \Phi(-1) = 1-\Phi(1) \\
&= 1-0.841 = \underline{\underline{0.159}}.
\end{aligned}$$

Videre er sannsynligheten for at resultatet av målingen ligger mellom 6.74 og 6.86 lik

$$\begin{aligned}
P(6.74 < X < 6.86) &= P(X < 6.86) - P(X < 6.74) \\
&= P(\frac{X-6.8}{0.06} < \frac{6.86-6.8}{0.06}) - 0.159 \\
&= \Phi(1) - 0.159 = 0.841 - 0.159 = \underline{\underline{0.682}}.
\end{aligned}$$

Sannsynligheten for at avviket $|X-\mu|$ overstiger 0.06 er

$$\begin{aligned}
P(|X-\mu|) > 0.06) &= P(X-\mu < -0.06) + P(X-\mu > 0.06) \\
&= P(\frac{X-\mu}{0.06} < -1) + P(\frac{X-\mu}{0.06} > 1) \\
&= \Phi(-1) + 1 - \Phi(1) = 2(1-\Phi(1)) = \underline{\underline{0.318}}.
\end{aligned}$$

Den samme sannsynligheten kan også regnes ut som følger:

$$\begin{aligned}
P(|X-\mu|) > 0.06) &= 1 - P(6.74 < X < 6.86) \\
&= 1 - 0.682 = \underline{\underline{0.318}}.
\end{aligned}$$

Oppgave 4

Fra oppgaveteksten har vi den betingede sannsynlighetsfordelingen til T gitt λ,

$$f_{T|\lambda}(t|\lambda) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0,$$

og sannsynlighetsfordelingen til λ,

$$f_\lambda(\lambda) = \theta e^{-\lambda\theta}, \quad \lambda \geq 0,$$

hvor θ inngår som en parameter. Simultanfordelingen til T og λ er da gitt ved

$$f_{T,\lambda}(t,\lambda) = f_{T|\lambda}(t|\lambda) \cdot f_\lambda(\lambda) = \lambda\theta e^{-\lambda(t+\theta)},$$

og marginalfordelingen til T kan finnes ved å integrere ut "mellomleddet" λ,

$$\begin{aligned}
f_T(t) &= \int_0^\infty f_{T,\lambda}(t,\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \lambda\theta e^{-\lambda(t+\theta)} d\lambda \\
&= \theta\left(\left[\lambda\left(-\frac{1}{t+\theta}\right)e^{-\lambda(t+\theta)}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{t+\theta} e^{-\lambda(t+\theta)} d\lambda\right) \\
&= \theta\left(0 - 0 + \left[\frac{1}{(t+\theta)^2} e^{-\lambda(t+\theta)}\right]_0^\infty\right) \\
&= \theta\left(0 + \frac{1}{(t+\theta)^2}\right) = \frac{\theta}{(t+\theta)^2}.
\end{aligned}$$

Altså er den marginale sannsynlighetstettheten til T gitt ved

$$\underline{\underline{f_T(t) = \frac{\theta}{(t+\theta)^2}, \quad t \geq 0.}}$$