TMA4245 Statistikk
Vår 2016

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Anbefalte oppgaver 5, blokk I

Denne øvingen er satt sammen med utgangspunkt i den delen av pensum som gjennomgås i sjette forelesningsuke. Oppgavene dreier seg i hovedsak om diskrete sannsynlighetsfordelinger.

Oppgave 1

Antall tankskip X som ankommer til en bestemt havn i løpet av en dag har vist seg å være poissonfordelt med $\mathrm{E}(X) = 2$. Havnen kan maksimalt betjene 3 tankskip pr. dag. De tre første ankomne blir ekspedert, eventuelle øvrige blir omdirigert til annen havn.

a) Hvilke(t) antall tankskip har størst sannsynlighet for å ankomme en bestemt dag? Hvor stor er sannsynligheten for at det en bestemt dag må dirigeres tankskip til andre havner?

b) Hva er forventet antall skip som blir betjent en bestemt dag?

c) Hvor stor kapasitet må havnen bygges ut til for med minst 90% sannsynlighet å kunne betjene samtlige skip som ankommer en gitt dag?

Oppgave 2

Fra høsten 2004 vil det i emnet "Statistikk" bli innført tellende skriftlig midtveiseksamen. Denne vil bli gitt i form av en flervalgsoppgave ("multiple choice") bestående av $n = 20$ spørsmål som alle har m svaralternativer. Studentene må velge et svaralternativ for hvert spørsmål (det er således ikke lov å svare "blankt" på et spørsmål). For å bestå midtveiseksamen må minst 8 spørsmål være korrekt besvart.

Ole lurer på om han skal la være å lese til midtveiseksamen og heller velge tilfeldige svaralternativer på alle spørsmålene (han vil da ikke engang lese oppgaveteksten før han svarer). Før han bestemmer seg, ber han en studiekamerat regne ut hvor stor sannsynlighet han da har for å bestå midtveiseksamen.

La X være antall korrekte svar Ole får på de $n = 20$ spørsmålene.

a) Forklar hvorfor vi kan anta at X er binomisk fordelt med $n = 20$ og $p = \frac{1}{m}$. (Det er ikke tilstrekkelig å skrive opp de generelle forutsetningene for en binomisk fordeling, betingelsene må relateres direkte til situasjonen som er beskrevet.)

Finn sannsynligheten for at Ole består midtveiseksamen hvis han velger å svare tilfeldig på alle spørsmålene, dvs. $P(X \geq 8)$, når antall svaralternativer er $m = 2$. Finn også $P(X \geq 8)$ for $m = 4$ og $m = 5$.

Hva blir forventet antall korrekte svar, dvs. $E(X)$, når $m = 2, 4, 5$?

Vi benytter videre at hvert spørsmål har $m = 5$ svaralternativer.

Ole bestemmer seg for å bruke midtsemesteruken til å jobbe med statistikk. Dagen før midtveiseksamen setter han seg ned og deler pensum inn i tre kategorier; de delene av pensum han synes han kan godt, de han kan middels godt, og de han kan dårlig.

Vi ser på et tilfeldig valgt spørsmål fra midtveiseksamen og definerer følgende fire hendelser:

$G =$ spørsmålet er fra den delen av pensum som Ole kan godt,
$M =$ spørsmålet er fra den delen av pensum som Ole kan middels godt,
$D =$ spørsmålet er fra den delen av pensum som Ole kan dårlig,
$K =$ Ole svarer korrekt på spørsmålet.

Ole setter opp følgende sannsynligheter:
$P(G) = 0.3$, $P(M) = 0.5$, $P(D) = 0.2$, $P(K|G) = 0.8$, $P(K|M) = 0.4$, $P(K|D) = 0.2$.

b) Vis de fire hendelsene i et venndiagram.

Hva er sannsynligheten for at Ole svarer korrekt på et tilfeldig valgt spørsmål, $P(K)$?

Gitt at Ole svarer korrekt på et tilfeldig valgt spørsmål, hva er da sannsynligheten for at spørsmålet er fra den delen av pensum som Ole kan dårlig, $P(D|K)$?

Oppgave 3 I et TV-program får et visst antall deltakere sjansen til å vinne et større pengebeløp. For hver deltaker består spillet av en serie påfølgende runder, der deltakeren i hver runde får presentert en oppgave. For hver oppgave deltakeren klarer, får han/hun et gitt beløp. Spillet avsluttes når deltakeren første gang ikke greier oppgaven, og deltakeren får da med seg beløpet vunnet i de øvrige rundene. Vi antar at ingen deltaker trekker seg frivillig underveis.

La p være sannsynligheten for IKKE å klare oppgaven i hver enkelt runde, og la videre X være antall runder for en tilfeldig valgt deltaker. Antall runder X defineres her slik at deltakeren går ut etter å ha klart oppgavene i de $X - 1$ første rundene, men ikke oppgaven i runde X. Vi antar at sannsynligheten p er lik for hver runde og for hver deltaker, og at resultatene for hver runde er uavhengige.

a) Anta bare i dette punktet at $p = 0.10$.

Forklar hvorfor X er geometrisk fordelt med parameter p i denne situasjonen.

Beregn sannsynligheten for at deltakeren går ut i første runde.

Beregn sannsynligheten for at deltakeren er med i spillet når det er gått fem runder.

Hva er sannsynligheten for at han/hun kommer videre til niende runde men ikke klarer oppgaven i niende runde, gitt at deltakeren var med i spillet når det var gått fem runder?

TV-selskapet bruker to personer, A og B, til å lage oppgavene. Selskapet ønsker å undersøke om vanskelighetsgraden er avhengig av hvem av dem som lager oppgavene.

De ser på resultatene fra n_1 tilfeldig valgte deltakere som har oppgaver fra oppgavelager A, og n_2 fra oppgavelager B. La Z_1 og Z_2 være antallet blant disse som klarer færre enn fem oppgaver fra henholdsvis oppgavelager A og B. Vi antar at Z_1 og Z_2 er uavhengige.

b) Forklar hvorfor Z_1 og Z_2 er binomisk fordelte med parametre (n_1, q_1) og (n_2, q_2), der q_1 og q_2 er sannsynligheten for å klare færre enn fem oppgaver i de to gruppene.

Oppgave 4

Antall trykkfeil, N, i et manuskript på s sider, antas å være en poissonfordelt stokastisk variabel med parameter λs, dvs.

$$P(N = n) = \frac{(\lambda s)^n}{n!} \exp(-\lambda s), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

En korrekturleser som leser korrektur på manuskriptet antas å oppdage hver trykkfeil med sannsynlighet p og ikke oppdage trykkfeilen med sannsynlighet $1 - p$. La X være antall feil korrekturleseren finner dersom han leser igjennom manuskriptet en gang. Vi skal anta at X gitt $N{=}n$ er binomisk fordelt,

$$P(X = x|N = n) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n.$$

a) Hvilken betingelse må vi i tillegg anta dersom vår antagelse om at $X|N{=}n$ er binomisk fordelt, skal være korrekt?

Dersom $\lambda = 2$ og manuskriptet er på $s = 8$ sider, hva er da sannsynligheten for at antall trykkfeil er større enn 10?

Dersom vi vet at manuskriptet inneholder 12 trykkfeil og at $p = 0.6$, hva er da sannsynligheten for at korrekturleseren vil finne alle trykkfeilene?

La Y_k være antall trykkfeil som gjenstår etter at korrekturleseren har lest igjennom manuskriptet k uavhengige ganger ($k = 1, 2, \ldots$), dvs. Y_1 er antall trykkfeil som gjenstår etter en gjennomlesning.

b) Finn simultanfordelingen til Y_1 og N, og bruk den til å finne (marginal)fordelingen til Y_1.

Fasit

1. **a)** 1 eller 2, 0.143 **b)** 1.782 **c)** 4

4. **a)** P($N > 10$)=0.923, P(finner alle feil) = 0.0022