TMA4245 Statistikk
Vår 2016

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Anbefalte oppgaver 4, blokk I

Dette oppgavesettet er laget for å gi trening i regning med og forståelse av forventning, varians og kovarians.

Oppgave 1

I et spill kaster hver deltager i hver omgang en terning 10 ganger. Spilleren får ett poeng hver gang han får to 6-ere etter hverandre. Dersom utfallet av en omgang er

$$1 \;\; 5 \;\; 6 \;\; 6 \;\; 6 \;\; 4 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 6 \;\; 6$$

får spilleren 3 poeng. Etter at en spiller er ferdig med sine terningkast, går turen videre til nestemann. La X_i være utfallet av terningkast nr. i, $i = 1, ..., 10$.

a) Hva er utfallsrommet til X_1? Skriv opp sannsynlighetsfordelingen til X_1, dvs $P(X_1 = x)$, og beregn deretter $E(X_1)$.

For å telle antall poeng en spiller får i omgangen, Z, lar vi Y_j være lik 1 dersom spilleren får ett poeng etter kast nr. j, $j = 2, ..., 10$, og lik 0 ellers. Altså:

$$Y_j = \begin{cases} 1, & \text{dersom} \quad X_j = X_{j-1} = 6 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

Vi har da sammenhengen $Z = \sum_{j=2}^{10} Y_j$.

b) Er Y_2 og Y_3 avhengige eller uavhengige? (Begrunn svaret).
Er Y_2 og Y_4 avhengige eller uavhengige? (Begrunn svaret).
Avgjør om korrelasjonskoeffisienten mellom Y_2 og Y_3 er negativ, positiv eller null. (Begrunn svaret). Gjør det samme for korrelasjonskoeffisienten mellom Y_2 og Y_4.

c) Beregn $\text{Cov}(Y_2, Y_3)$, $E(Z)$ og $\text{Var}(Z)$. Avgjør om korrelasjonskoeffisienten mellom Y_2 og Y_3 er negativ, positiv eller null. (Begrunn svaret). Gjør det samme for korrelasjonskoeffisienten mellom Y_2 og Y_4.

Oppgave 2

Vis at

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \operatorname{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \operatorname{Var}(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j<i} a_i a_j \operatorname{Cov}(X_i, X_j)\end{aligned}$$

Det er nok at du viser det i det tilfellet at $E(X_i) = 0$ for $i = 1, 2, \ldots, n$. Da er $\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)^2\right]$

Oppgave 3

a) La A og B være to hendelser i et utfallsrom. Det oppgis at $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.3$ og $P(A \cup B) = 0.6$.

Er hendelsene A og B disjunkte? Er hendelsene A og B uavhengige?

Oljefeltet Aldous Major / Avaldsnes ble funnet på grunn av mindre lignende funn i nærområdet. Avhengighetsstruktur i modellen for oljefunn ga økt sannsynlig for å finne olje på Aldous Major / Avaldsnes.

Vi tenker oss to oljefelt. Vi antar at man ved oljeleting enten gjør et funn, eller ikke finner olje. Hendelsen A = oljefunn på felt 1, mens den komplementære hendelsen A^c = ingen olje på felt 1. Tilsvarende er hendelsen B = oljefunn på felt 2, mens B^c = ingen olje på felt 2. Vi får oppgitt at $P(A \cap B) = 0.05$, $P(A^c \cap B) = 0.1$, $P(A \cap B^c) = 0.15$ og $P(A^c \cap B^c) = 0.7$.

b) Tegn et Venn diagram for hendelsene.

Finn sannsynligheten for olje på felt 1.

Anta at man har funnet olje på felt 2. Hva er nå sannsynligheten for olje på felt 1?

Anta at man har påvist at felt 2 ikke inneholder olje. Hva er nå sannsynligheten for olje på felt 1?

Er hendelsene A og B uavhengige?

Vi ser for oss en kostnad $K = 100$ millioner kroner ved å lete etter olje. Dersom man ikke finner olje får man ingen gevinst, men betaler denne kostnaden. Dersom man finner olje, får man en stor gevinst, som overstiger kostnaden K. Anta at fortjenesten ved oljefunn på felt 1 er $R_1 = 500 - K = 400$ millioner kroner, mens fortjenesten ved oljefunn på felt 2 er $R_2 = 1100 - K = 1000$ millioner kroner.

c) Regn ut forventet fortjeneste ved å lete etter olje på felt 1.

Anta at man har funnet olje på felt 2. Hva er nå forventet fortjeneste ved å lete etter olje på felt 1?

Anta at du kan velge mellom følgende letestrategier: Ikke lete noe sted, lete ved felt 1, eller lete ved felt 2. Hvis man velger å lete ved felt 1 eller 2, kan man avhengig av utfallet stoppe, eller lete videre på det andre feltet. Beslutninger velges utfra forventningsverdien. Hvilken letestrategi gir høyest forventet fortjeneste, og hva er forventet fortjeneste under denne strategien?

Oppgave 4

En murer har etter lang erfaring funnet ut at mengden ferdigblandet mørtel (X hl) som han bruker pr. dag er en kontinuerlig stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{for } 4 < x \leq 7 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Den ferdigblandede mørtelen han kjøper inn én dag, kan ikke brukes neste dag. Dessuten forutsetter han at den mengde han bruker én dag, er uavhengig av mengden han bruker andre dager.

a) Hvor stor er sannsynligheten for at han en gitt dag skal bruke mer enn 6 hl mørtel? Hvor mye mørtel må han kjøpe inn én dag hvis sannsynligheten for å få for lite mørtel den dagen skal være 5% ?

b) Hvis han kjøper inn 6 hl mørtel hver dag i 4 dager, hvor stor er da sannsynligheten for at han minst én dag skal få for lite mørtel?

c) Han regner med at han taper 20 kr. pr. hl mørtel han ikke bruker en dag. Hvis han derimot får for lite mørtel, vil han p.g.a. tapt arbeidsfortjeneste tape 50 kr. for hver hl han kunne ha brukt. Hvor stort blir det forventede tapet hvis han kjøper inn 6 hl? Hvor mye bør han kjøpe inn for at tapet skal bli så lite som mulig?

Fasit

1. **a**) $\mathrm{E}(X_1) = 3.5$ **c**) $3.86 \cdot 10^{-3}$, 0.25, 0.55^2

4. **a**) 0.3, 6.85 **b**) 0.80 **c**) 21.7, 6.14