TMA4245
Statistikk

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving nummer b2

Oppgave 1 Oppgave 9.11 fra læreboka.

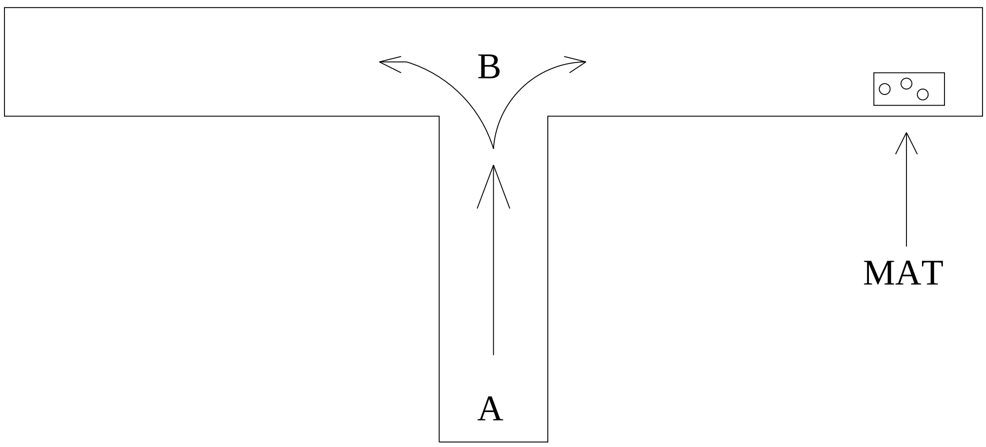
Oppgave 2 Oppgave 9.15 fra læreboka.

Oppgave 3 Oppgave 9.39 fra læreboka.

Oppgave 4 Oppgave 9.45 fra læreboka.

Oppgave 5 Rotters læringsevne — Eksamen august 1997, oppgave 2 av 2

Kari er nylig ferdig med sine studier i Trondheim og på sin første arbeidsdag får hun en interessant oppgave på laboratoriet. Hun blir bedt om å undersøke rotters læringsevne. Dette skal gjøres ved hjelp av et T-formet bur, se figuren under. En rotte slippes inn ved punkt A.



Rotta går så til punkt B og må der gå enten til høyre eller til venstre. Hvis den går til høyre, finner den mat. Hvis den går til venstre finner den ingenting. Kari antar at en rotte som slippes inn i buret for første gang går til høyre med sannsynlighet $1/2$ eller venstre med sannsynlighet $1/2$. For en rotte som slippes inn i buret for andre gang, gjelder derimot følgende regel: Hvis den første gang gikk til venstre, vil den igjen velge høyre med sannsynlighet $1/2$ og venstre med sannsynlighet $1/2$. Hvis den første gang gikk til høyre vil den neste gang gå til høyre med sannsynlighet θ og til venstre med sannsynlighet $1-\theta$, der $0 < \theta < 1$. Dersom $\theta > 1/2$ innebærer det altså at rotta har lært av å finne mat første gangen og derfor har større sannsynlighet for å gjøre samme valget neste gang.

Kari bestemmer seg for å undersøke rotters lærningsevne med følgende eksperiment. Hun slipper en rotte inn i buret to ganger og definerer

$$X = \begin{cases} 1, & \text{dersom rotta begge ganger går til høyre,} \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

a) Vis at sannsynlighetsfordelingen til X, $f(x)$, kan skrives som

$$f(x) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{1-x}, \qquad x = 0, 1.$$

Vis at

$$\mathrm{E}(X) = \frac{\theta}{2} \qquad \text{og} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{\theta}{2}\left(1 - \frac{\theta}{2}\right).$$

b) Finn sannsynligheten for at rotta går til høyre andre gangen den blir slippet inn i buret.

Dersom rotta gikk til høyre andre gang den ble sluppet inn i buret, hva er sannsynligheten for at den gikk til høyre også første gang ?

Dersom $x = 0$, hva er sannsynligheten for at rotta gikk til høyre andre gang den ble slippet inn i buret ?

For å undersøke rotters læringsevne utfører Kari eksperimentet beskrevet over for $n = 100$ rotter og observerer $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Hun antar at $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er et tilfeldig utvalg fra $f(x)$. (For å være på den sikre siden, registrerer hun også begge valg til alle rottene, i fall hun skulle ønske å analysere dataene på en annen måte senere.)

c) Vis at sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren for θ, $\widehat{\theta}$, basert på $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er

$$\widehat{\theta} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Finn forventningsverdi og varians til $\widehat{\theta}$.

d) Finn et (tilnærmet) 95% konfindensintervall for θ ved å benytte at

$$\frac{\widehat{\theta} - \theta}{\sqrt{\frac{2\widehat{\theta}}{n}(1 - \frac{\widehat{\theta}}{2})}}$$

er tilnærmet standard normalfordelt når n er stor.

Hva blir konfidensintervallet når Kari observerer $\sum_{i=1}^{n} x_i = 32$?

Kari går nå til lunsj, godt fornøyd etter å ha utført eksperimentet beskrevet over. På lunsjrommet ser Kari tilfeldigvis en rapport som omhandler en annen lignende studie. Hun finner raskt ut at forfatterne har utført et tilsvarende eksperiment, men de har estimert θ basert på andre observasjoner enn Karis X'er. Forfatterne har definert

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{dersom rotta går til høyre første gang } \textit{og} \text{ til venstre andre gang,} \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Tilsvarende til Kari, observerer de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ for rotte nummer $1, 2, \ldots, n$. De antar videre at $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ er et tilfeldig utvalg fra en sannsynlighetsfordeling $g(y)$ (som du ikke trenger å regne ut). Sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren for θ, $\widetilde{\theta}$, basert på $Y_1, \ldots, Y_n$, er funnet av forfatterne som

$$\widetilde{\theta} = 1 - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Videre er det oppgitt at

$$\mathrm{E}(\widetilde{\theta}) = \theta \qquad \text{og} \qquad \mathrm{Var}(\widetilde{\theta}) = (1 - \theta^2)/n.$$

Tilbake etter lunsj, vil Kari undersøke hvilken av estimatorene $\widehat{\theta}$ og $\widetilde{\theta}$ som hun bør benytte til å estimere θ.

e) Hvilken estimator, $\widehat{\theta}$ eller $\widetilde{\theta}$, bør Kari benytte? Begrunn svaret.

Oppgave 6 Vi skal gå ut fra at antallet fødsler i løpet av t timer, X, ved en fødeavdeling er poissonfordelt med punktsannsynlighet gitt ved:

$$P(X = x) = \frac{(\lambda t/24)^x}{x!} \exp(-\lambda t/24).$$

I spørsmål a), b) og c) skal vi gå ut fra at $\lambda = 15$.

a) Hva er forventet antall fødsler pr. døgn? Finn sannsynligheten for at det inntreffer mer enn 20 fødsler i løpet av et døgn. Hva er sannsynligheten for at antall fødsler i et døgn skal avvike med mer enn 5 fra forventningsverdien?

b) La T være tiden i timer fra midnatt (kl. 00.00) et døgn til første fødsel skjer. Vis at

$$P(T > t) = \begin{cases} \exp(-\lambda t/24) & \text{dersom } t \geq 0 \\ 1 & \text{ellers} \end{cases}$$

Finn sannsynlighetstettheten til T. Finn sannsynligheten for at det ikke inntreffer noen fødsler i løpet av de to første timene etter midnatt.

c) Utled forventningsverdien til T. Anta nå at det ikke har blitt noen fødsler på fødeavdelingen i løpet av de to første timene etter midnatt. Finn sannsynligheten for at en må vente minst 2 timer til før det skjer en fødsel.

d) Fødeavdelingen har mistanke om at λ har økt og vil derfor estimere λ på nytt. Dessverre er det blitt rot i protokollene slik at i noen tilfeller har de bare det rette antall fødsler for en viss del av døgnet. For å forenkle situasjonen, la X_1, X_2 og X_3 være antall fødsler 3 etterfølgende døgn. X_1 og X_2 er for et helt døgn, mens X_3 er tallet på fødsler i løpet av 16 timer av døgn nr. 3. Finn sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (SME) for λ. Finn forventning og varians til estimatoren.

e) En annen foreslått estimator er gitt ved

$$\tilde{\lambda} = k(9X_1 + 9X_2 + 6X_3)$$

Bestem k slik at estimatoren blir forventningsrett og finn variansen til denne. Hvilken av estimatorene ville du velge for å estimere λ?

Fasit

5. **b**) $\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}$, $\frac{2\theta}{2\theta+1}$, $\frac{1}{2}\frac{1}{2-\theta}$ **c**) $\mathrm{E}(\widehat{\theta}) = \theta$, $\mathrm{Var}(\widehat{\theta}) = \frac{2\theta}{n}(1 - \frac{\theta}{2})$ **d**) $[0.457, 0.823]$ **e**) $\widetilde{\theta}$ er å foretrekke

6. **a**) λ, 0.083, 0.153 **b**) 0.287 **c**) 24/15, 0.287