TMA4245
Statistikk

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving nummer b1

Oppgave 1 Oppgave 8.5 fra læreboka.

Oppgave 2 Oppgave 8.10 fra læreboka.

Oppgave 3 Oppgave 8.23 fra læreboka.

Oppgave 4 Oppgave 8.40 fra læreboka.

Oppgave 5 Oppgave 8.50 fra læreboka.

Oppgave 6 Levetider X (i timer) for lyspærer antas å være eksponsialfordelt

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} \quad x > 0.$$

På markedet tilbys billigpærer. Anta at disse er eksponensialfordelte med parameter $\mu = \mu_B$, mens vanlige pærer har $\mu = \mu_V$.

a) Vis at fordelingsfunksjonen for X er

$$F(x) = 1 - \exp(-x/\mu), \qquad x > 0.$$

Anta at $\mu_B = 1000$. Hva er da sannsynligheten for at levetiden for billigpærer er mindre enn 2000 timer, og hva er median levetid for denne typen pærer?

b) Vis at $2X/\mu$ er χ-kvadratfordelt med 2 frihetsgrader. La $X_1 \ldots, X_n$ være uavhengige og eksponensialfordelte med parameter μ. Hva er da fordelingen til $2 \sum_{j=1}^{n} X_j/\mu$?

Oppgave 7 Eksamen mai 2002, oppgave 2 av 3

På et analyselaboratorium drives en kontinuerlig kvalitetskontroll. Hver gang en serie prøver analyseres, analyseres også en kontrolløsning med kjent konsentrasjon 0,10 mg/l. Utfallet av analysen av kontrolløsningen kan regnes som normalfordelt med forventningsverdi μ og varians σ^2, der σ^2 er variansen i målefeilen ved analysemetoden og μ under normale omstendigheter er lik 0,10 mg/l.

En *alarmhendelse* A er definert ved at målt verdi X i kontrolløsningen avviker mer enn 2 standardavvik fra konsentrasjonen 0,10 mg/l, altså $|X - 0{,}1| > 2\sigma$ (dvs. $X < 0{,}1 - 2\sigma$ eller $X > 0{,}1 + 2\sigma$). En *aksjonshendelse* B er definert ved at målt verdi X i kontrolløsningen avviker mer enn 3 standardavvik fra 0,10 mg/l, dvs. $|X - 0{,}1| > 3\sigma$.

a) Anta (bare i dette punktet) at $\sigma = 0{,}01$ mg/l.

Beregn $P(B)$ og $P(B \mid A)$ når $\mu = 0{,}10$ mg/l.

Anta så at en urenhet har sneket seg inn i prøven, slik at $\mu = 0{,}11$ mg/l, og beregn nå $P(B)$.

Anta i resten av oppgaven at $\mu = 0{,}10$ mg/l. For å estimere σ^2 benyttes resultatene X_1, X_2, $\ldots$, X_n, som er uavhengige, fra flere analyser av kontrolløsningen. To estimatorer for σ^2 er foreslått,

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2,$$

der $\mu = 0{,}10$ mg/l er den kjente konsentrasjonen i kontrolløsningen, og

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

der $\overline{X}$ er empirisk middelverdi (utvalgsmiddelverdi).

I de neste punktene kan du bruke uten bevis at $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2/\sigma^2$ og $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2/\sigma^2$ er χ^2-fordelte (khikvadratfordelte) med henholdsvis n og $n-1$ frihetsgrader.

b) Hvilke to egenskaper kjennetegner en god estimator?

Hvilken av de to estimatorene $\widehat{\sigma^2}$ og S^2 vil du anbefale?

Resultatene målt i mg/l av 20 analyser av kontrolløsningen er:

0,0939	0,1069	0,1002	0,1106	0,0866	0,1048	0,0837	0,0856	0,1029	0,0986
0,0887	0,0971	0,0942	0,0910	0,1025	0,0851	0,1031	0,0797	0,1053	0,1034

Det oppgis at $\sum_{i=1}^{20} x_i = 1{,}9240$ og at $\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 0{,}1866$.

c) Utled et 90 %-konfidensintervall for σ^2 ved å benytte din favorittestimator fra (b).

d) En ønsker et 90 %-konfidensintervall med lengde høyst 50 % av punktestimatet. Hvor mange observasjoner trengs? Oppgi svaret avrundet opp til nærmeste tall delelig på 10 (10, 20, 30, ...). (Vink: Prøv deg fram med tall fra tabellen i *Tabeller og formler i statistikk*.)

Fasit

6. **a**) 0.865, 693.15

7. **a**) 0.0026, 0.057, 0.0228 **c**) $[5.7 \cdot 10^{-5}, 17 \cdot 10^{-5}]$ **d**) $n > 100$