TMA4245
Statistikk

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving nummer 6

Oppgave 1 Oppgave 7.1 fra læreboka.

Oppgave 2 Simultanfordeling - Eksamen august 2006, oppgave 4 av 4

Simultanfordelingen, $f(x, y)$, til de to diskrete stokastiske variablene X og Y er gitt i følgende tabell:

	y=0	y=1	y=2
x=-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
x=0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
x=1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

Finn marginalfordelingen til X og til Y, og beregn forventning og varians til X og til Y.

Beregn kovariansen mellom X og Y, $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Er X og Y uavhengige? Svaret skal begrunnes.

Oppgave 3 Levetid til elektroniske komponenter — Eksamen desember 1999, oppgave 4 av 5, punkt a,b (av a-e)

Levetiden (målt i måneder), X, til en del typer elektroniske komponenter har vist seg å følge en fordeling med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{\sqrt{x}}{\theta}} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases} \tag{3.1}$$

der θ er en parameter som beskriver kvaliteten til komponentene. Tilhørende kumulative fordelingsfunksjon er gitt ved

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{\sqrt{x}}{\theta}} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

I hele denne oppgaven antar vi at levetider til ulike komponenter er uavhengige.

[Hint: Du kan i denne oppgaven uten bevis benytte at

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-\frac{\sqrt{x}}{\theta}} \mathrm{d}x = 2\theta^{2\alpha+2}\Gamma(2\alpha+2), \quad \text{for } \alpha > -1, \theta > 0,$$

der $\Gamma(\alpha)$ er gamma-funksjonen (se også tabell).]

a) For $\theta = 2.0$, finn sannsynligheten for at en elektronisk komponent av denne typen fremdeles skal funksjonere etter 10 måneder.

Gitt at en komponent fremdeles funksjonerer etter 10 måneder, hva er sannsynligheten for at den også vil funksjonere etter 20 måneder dersom $\theta = 2.0$?

Vis at

$$\mathrm{E}(X) = 2\theta^2.$$

b) Et bestemt instrument inneholder to elektroniske komponenter, komponent A og komponent B. For at instrumentet skal funksjonere må begge de to elektroniske komponentene funksjonere. La X_A betegne levetiden til komponent A og la X_B være levetiden til komponent B. Levetiden til instrumentet blir dermed

$$U = \min(X_A, X_B).$$

Levetidene for begge komponentene er på formen gitt i ligning (3.1), men med ulik kvalitetsparameter θ, dvs. komponent A har kvalitetsparameter θ_A, mens komponent B har kvalitetsparameter θ_B.

Finn sannsynlighetstettheten for instrumentets levetid (uttrykt ved θ_A og θ_B).

Hva blir forventet levetid for instrumentet ?

Oppgave 4 X er kontinuerlig fordelt med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Finn sannsynlighetsfordelingen til

a) $U = X - 2$

b) $V = -2X$

c) $W = X^2$

Oppgave 5 Levetid for lyspærer — Eksamen august 2002, oppgave 3 av 3

To typer lyspærer, A og B, har levetider henholdsvis X og Y, der X og Y antas uavhengige. Videre antas at X har sannsynlighetstetthet $f_1(x)$ og Y har sannsynlighetstetthet $f_2(y)$, der

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta_1} e^{-x/\beta_1} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}, \qquad f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{\beta_2} e^{-y/\beta_2} & \text{for } y \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

og $\beta_1, \beta_2 > 0$.

a) Vis at forholdet mellom forventet levetid for pære A og forventet levetid for pære B er β_1/β_2.

La $U = X/Y$ være forholdet mellom levetidene og la $V = Y$.

b) Finn simultan sannsynlighetstetthet for U og V.

Vis at marginal sannsynlighetstetthet for U er

$$g(u) = \begin{cases} \frac{\beta_1\beta_2}{(\beta_1+\beta_2 u)^2} & \text{for } u \geq 0, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

c) Vis at $\mathrm{E}(U)$ er uendelig.

Oppgave 6 Eksamen desember 1999, oppgave 5 av 5

I en poissonprosess med intensitet λ, la X_1 betegne tiden frem til første hendelse og la X_2 betegne tiden mellom første og andre hendelse. Som kjent er da X_1 og X_2 uavhengige og eksponensialfordelte med forventning $1/\lambda$ (dette trenger ikke du vise). La Y betegne tiden frem til andre hendelse, dvs.

$$Y = X_1 + X_2.$$

Vis at da er Y gamma-fordelt med parametre $\alpha = 2$ og $\beta = 1/\lambda$, dvs. vis at sannsynlighetstettheten for Y er

$$f(y) = \begin{cases} \lambda^2 y e^{-\lambda y} & \text{for } y > 0, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Oppgave 7 Oppgave 1 fra notatet "Ordningsvariabler og ekstremvariabler"

Betrakt et parallellsystem av 2 uavhengige komponenter. Levetiden til hver komponent er eksponensialfordelt med parameter λ, dvs

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

La V være levetiden til systemet. Finn fordelingen til V, samt $\mathrm{E}(V)$.

Fasit

3. **a**) $0.206, 0.519$ **b**) $f(u) = (1/\theta_A + 1/\theta_B)\exp(-u^{1/2}(1/\theta_A + 1/\theta_B))/(2u^{1/2}), \mathrm{E}(U) = 2(\theta_A \, \theta_B / \, (\theta_A + \theta_B))^2$