TMA4245
Statistikk

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

**Øving nummer 5**

**Oppgave 1 Eksamen august 2001, oppgave 2 av 4**

La $X$ og $Y$ være to uavhengige normalfordelte stokastiske variable, der $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 1$, $\mathrm{Var}(X) = 1$ og $\mathrm{Var}(Y) = 4$.

Bestem følgende sannsynligheter

$$\mathrm{P}(X \leq 2) \quad , \quad \mathrm{P}(X \leq 2 \cap Y \leq 1) \quad \text{og} \quad \mathrm{P}(X + 2Y > 2).$$

**Oppgave 2 Eksamen mai 2003, oppgave 1 av 3**

La $X$ være høyden til en tilfeldig valgt 6-årig jente. Vi antar at høyden er normalfordelt med forventning $\mathrm{E}(X) = 115$ cm og standardavvik $\mathrm{SD}(X) = 5$ cm.

**a**) Beregn sannsynlighetene

$$P(X \leq 120) \text{ og } P(120 < X \leq 125).$$

Vi lar videre følgende hendelser være definert:

$A:\quad X \leq 120$
$B:\quad X > 125$

Er $A$ og $B$ disjunkte? Er $A$ og $B$ uavhengige? Begrunn svarene.

Vi tenker oss at vi går til år 2010, og er interessert i jentenavn blant førsteklassinger, dvs. blant de som er født i 2004. Navnestatistikken viser at 2% av jentene som ble født dette året fikk navnet Maud.

**b**) La $Z$ være antall jenter som heter Maud i en tilfeldig valgt førsteklasse der det er $n$ jenter. Forklar hvorfor det er rimelig å anta at $Z$ er binomisk fordelt med parametre $n$ og $p$, der $p = 0.02$.

Vi vil i resten av oppgaven anta at $Z$ er binomisk fordelt med $n = 15$ og $p = 0.02$. La hendelsene $C$ og $D$ være definert ved

$C:\quad$ minst en av jentene i klassen heter Maud
$D:\quad$ akkurat to jenter i klassen heter Maud

Beregn sannsynlighetene $P(C)$ og $P(D \mid C)$.

Anta at det er totalt 25 elever i klassen. Hva er da sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev blant alle elevene i klassen heter Maud?

**Oppgave 3 Fotballkort — Eksamen august 1996, oppgave 4 av 4**

Georg samler på fotballkort med bilde av forskjellige fotballspillere. Hver gang han er på nærbutikken kjøper han ett nytt fotballkort. Fotballkortet er innpakket slik at han ikke ser på forhånd hvilken fotballspiller som er avbildet på det fotballkortet han kjøper. En komplett serie med fotballkort består av $M$ bilder med forskjellige fotballspillere. Etter en stund begynner Georg å bli grundig lei av å få fotballkort med bilde av fotballspillere han allerede har, og han bestemmer seg for å gå hjem og regne på dette.

**a)** Anta nå at Georg har $n$ forskjellige fotballspillere avbildet på sine fotballkort og at han kjøper ett nytt innpakket fotballkort. Vi antar at nærbutikken har ubegrenset antall forballkort for salg. La $X_n$ være antall fotballkort Georg må kjøpe inntil han får et bilde av en fotballspiller som han ikke har fra før.

Hva er $\mathrm{P}(X_n = 1)$ og $\mathrm{P}(X_n = 2)$?
Hva er $\mathrm{P}(X_n = x)$? $(x = 1, 2, 3, \ldots)$
Hva er $\mathrm{E}(X_n)$ og $\mathrm{Var}(X_n)$?

En dag kommer det en ny serie med fotballkort i butikken, der også den nye serien har $M$ forskjellige fotballkort. La $Y$ være antall fotballkort Georg må kjøpe av den nye serien inntil han får en komplett serie med alle de $M$ forskjellige fotballspillerene. Før Georg bestemmer seg for å begynne å samle på den nye serien, vil han gjerne vite forventingsverdi og varians til $Y$.

**b)** Uttrykk $Y$ ved hjelp av $X_0, \ldots, X_{M-1}$ og finn tilærmede uttrykk for $\mathrm{E}(Y)$ og $\mathrm{Var}(Y)$ når $M$ er stor. Kommenter.

Nyttige formler:

$$\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1}p = 1/p\,, \qquad \sum_{x=1}^{\infty} x^2(1-p)^{x-1}p = (2-p)/p^2\,,$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{z=1}^{m} \frac{1}{z^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \text{og} \qquad \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\ln m} \sum_{z=1}^{m} \frac{1}{z} = 1\,.$$

**Oppgave 4** Oppgave 6.3 fra læreboka.

**Oppgave 5** Oppgave 6.9 fra læreboka.

**Oppgave 6** Oppgave 6.33 fra læreboka.

**Oppgave 7** Oppgave 6.45 fra læreboka.

## Fasit

**1**. 0.8413, 0.4207, 0.5948

**2**. **a**) 0.841, 0.136 **b**) 0.012

**3**. **a**) $\mathrm{P}(X_n = 1) = 1 - n/M$, $\mathrm{P}(X_n = 2) = \frac{n}{M}\left(1 - \frac{n}{M}\right)$, $\mathrm{P}(X_n = x) = \left(\frac{n}{M}\right)^{x-1} \cdot \left(1 - \frac{n}{M}\right)$, $\mathrm{E}(X_n) = M/(M-n)$, $\mathrm{Var}(X_n) = nM/(M-n)^2$ **b**) $\mathrm{E}(Y) \approx M \ln(M)$, $\mathrm{Var}(Y) \approx M^2 \cdot \frac{\pi^2}{6}$