Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4245
Statistikk

Øving nummer 4

Oppgave 1 En lottorekke består av 7 tall krysset av blant tallene $1, 2, ..., 34$. Mer presist kan den oppfattes som et ikke-ordnet utvalg på 7 elementer blant tallene 1 til 34, der utvelgingen skjer uten tilbakelegging. Hver lørdag trekker Norsk Tipping ut ukens riktige lottorekke ved tilfeldig trekking slik at alle mulige lottorekker blir like sannsynlige. Ukens toppgevinst utbetales til innehaverne av de innleverte rekker som er identiske med den riktige lottorekka (dvs. oppnår 7 riktige tall). Dersom ingen har tippet den riktige rekka, blir premiepotten for 7 riktige overført til neste ukes lotto-omgang (som blir en "Gull-Lotto" omgang).

a) Hvor mange forskjellige lottorekker finnes det? Hva er sannsynligheten for at tallet 34 er med i den riktige lottorekka? Gjør rede for at enhver lottorekke vil oppnå 7 riktige ved lottotrekningen med sannsynlighet $p = 1.859 \cdot 10^{-7}$.

Anta at det en bestemt uke leveres inn tilsammen $n = 19\,000\,000$ rekker i lotto. La X være antall av disse rekkene som oppnår 7 riktige i ukens trekning. Det antas at X er binomisk fordelt med parametre n og p (med verdier som gitt ovenfor).

b) Hvorfor vil X med god tilnærmelse kunne regnes å være poissonfordelt? Hva blir parameteren i denne poissonfordelingen? Finn sannsynligheten for at ingen av de innleverte rekkene oppnår 7 riktige ved ukens trekning. Anta i det følgende at antall innleverte rekker holder seg konstant på $19\,000\,000$ pr. uke. Hva blir da det forventede antall "Gull-Lotto" omganger pr. år? Hva blir sannsynligheten for at det i løpet av et år ikke oppnås noen "Gull-Lotto"-omgang?

c) Norsk Tipping ønsker å øke hyppigheten av "Gull-Lotto"-omganger og vurderer derfor å øke antall valgbare tall fra 34 til m (>34), mens en rekke fremdeles skal bestå av 7 tall. Hvor stor må m velges for at det med sannsynlighet minst 0.10 ikke finnes rekker med 7 riktige i en uke der det innleveres $n = 19\,000\,000$ rekker?

Oppgave 2 I en skoleklasse er det 6 gutter og 9 jenter. Hver skoledag får en elev i oppdrag av læreren å tørke av tavlen. I denne oppgaven betyr dager det samme som skoledager og disse tenker vi oss nummerert slik at 1. skoledag har nr. 1, 2. skoledag har nr. 2 osv. Vi antar dessuten at vi er ved skoleårets begynnelse.

a) Anta at læreren hver dag velger ut en elev tilfeldig av de 15 til å tørke av tavlen. La X være antall jenter som blir valgt ut i løpet av 10 dager. Forklar hvorfor X er binomisk fordelt. Finn sannsynligheten for at $X = 6$ og dessuten sannsynligheten for at X er større enn 5.

b) Anta i dette punktet at utvelgingen skjer tilfeldig, men at ingen kan bli valgt ut på nytt før alle har hatt jobben med å tørke av tavlen. La Y være antall jenter som blir valgt ut i løpet av de 10 første dagene. Hvilken fordeling får Y? Grunngi svaret. Finn sannsynligheten for at $Y = 6$.

I punkt c) og d) skal vi som i a) anta at læreren hver dag velger tilfeldig blant de 15 elevene.

c) Hva er sannsynligheten for at det går minst 5 dager før en gutt blir valgt ut? Anta så at det har gått 5 dager uten at en eneste gutt er valgt ut. Hva er sannsynligheten for at det går minst 5 dager til før dette skjer? Kommenter.

d) Vi skal i dette punktet for enkelhelts skyld anta at et skoleår har uendelig mange dager. Håkon er en elev i klassen. Finn sannsynligheten for at Håkon skal bli valgt ut for 1. gang den k-te dagen. Hvilket forventet nummer har dagen da Håkon for første gang blir valgt ut? Hint: Du kan bruke at $\sum_{k=0}^{\infty} ka^k = \frac{a}{(1-a)^2}$ for $|a| < 1$.

Oppgave 3 Antall tankskip X som ankommer til en bestemt havn i løpet av en dag har vist seg å være poissonfordelt med $\mathrm{E}(X) = 2$. Havnen kan maksimalt betjene 3 tankskip pr. dag. De tre første ankomne blir ekspedert, eventuelle øvrige blir omdirigert til annen havn.

a) Hvilke(t) antall tankskip har størst sannsynlighet for å ankomme en bestemt dag? Hvor stor er sannsynligheten for at det en bestemt dag må dirigeres tankskip til andre havner?

b) Hva er forventet antall skip som blir betjent en bestemt dag?

c) Hvor stor kapasitet må havnen bygges ut til for med minst 90% sannsynlighet å kunne betjene samtlige skip som ankommer en gitt dag?

Oppgave 4 Oppgave 5.1 fra læreboka.

Oppgave 5 Oppgave 5.3 fra læreboka.

Oppgave 6 Oppgave 5.23 fra læreboka.

Oppgave 7 Oppgave 5.61 fra læreboka.

Fasit

1. a) 5379616, 7/34 **b)** 3.53, 0.029, 1.5, 0.22 **c)** 36

2. a) 0.251, 0.633 **b)** 0.42 **c)** 0.078, 0.078 **d)** 15

3. **a**) 1 eller 2, 0.143 **b**) 1.782 **c**) 4