Ekstraøving 1

TMA4245

Februar, 2009

1 Brownske bevegelser

Vi vil i denne oppgaven se på noen egenskaper til Brownske bevegelser. Generelt sett er Brownske bevegelser en klasse av kontinuerlige stokastiske prosesser som oppfyller bestemte egenskaper. Vi skal se på en diskret variant. Brownske bevegelser kan beskrive bevegelser til molekyler i en gass eller f.eks. en fylliks vandring på veien.

La B_i være en tilfeldig variabel gitt på følgende vis:

$$\begin{aligned} B_0 &= 0 \\ B_1 &= dB_1 \\ B_2 &= B_1 + dB_2 \\ &\dots \\ B_i &= B_{i-1} + dB_i \end{aligned} \tag{1}$$

der $dB_i \sim N(0, dt)$.

Oppgave 1: Finn $E(B_iB_j)$
Oppgave 2: Finn $Var(B_i - B_j)$ og $Var(B_{i+k} - B_{j+k})$
Oppgave 3: For $i < j \leq k < l$, finn $E((B_i - B_j)(B_k - B_l))$

En kan simulere brownske bevegelser i matlab ved å bruke følgende script:

```
s=0.5;
N=20;

[x,y]=brown1d(N,s,1);

plot(x,y);
axis([x(1) x(end) -1 1])
```

med funksjonen

```
function [x,y]=brown1d(N,s,k)

Dt=1/N;

y=sqrt(Dt)*s*[zeros(1,k);randn(N,k)];
```

```
y=cumsum(y);

x=(0:N)'*Dt;

end
```

2 Multivariat Gaussisk fordeling

En multivariat Gaussisk fordeling er fullstendig beskrevet ved hjelp av en kovariansmatrise Σ og en forentningsvektor, μ. Fordelingen til en slik variabel, $x \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, der $x, \mu \in \mathbb{R}^d$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ er symmetrisk positiv definitt kan beskrives med følgende tetthetsfunksjon

$$f(x; \mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \det(\Sigma)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu) \right) \tag{2}$$

Alternativt kan en beskrive den ved hjelp av forventningsvektor μ og presisjonsmatrise $Q = \Sigma^{-1}$.

Oppgave 4: La Q være gitt ved

$$Q = \begin{pmatrix} a & b & 0 & c \\ b & a & d & 0 \\ 0 & d & a & 0 \\ c & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \tag{3}$$

og la $x \sim \mathcal{N}(0, Q^{-1})$. Finn fordelingen til $(x_1, x_3)|(x_2, x_4)$ og $(x_1, x_2)|(x_3, x_4)$. (Hint: $p(x_1, x_2|x_3, x_4) \propto p(x_1, x_2, x_3, x_4)$)

Oppgave 4: La Σ være gitt ved

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & b & 0 & c \\ b & \sigma & d & 0 \\ 0 & d & \sigma & 0 \\ c & 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} \tag{4}$$

og la $x \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$. Finn fordelingen til $(x_1, x_3)|(x_2, x_4)$ og $(x_1, x_2)|(x_3, x_4)$.