Poisson-, kontinuerleg uniform- og normalfordeling

Torstein Fjeldstad
Institutt for matematiske fag, NTNU
24.09.2018

I dag

1. Poissonfordelinga
2. Uniform fordelinga
3. Normalfordelinga

Poissonfordelinga

Eksempel (buss)

Oppgåve

La X vere talet på bussar som passerer Samfundet i løpet av T minutt.

Kva er fordelinga til X?

La oss starte med nokre antakingar...

Poissonfordelinga I

- Talet på hendingar i eit tidsintervall er uavhengig av talet på hendingar i disjunkte tidsintervall
- Sannsynet for at ei hending inntreff i eit kort tidsintervall er proporsjonalt med lengda på tidsintervallet

$$P(\text{"}X = 1\text{" i intervallet } [t, t + \Delta t)) = \lambda \Delta t + o(\Delta t) \rightarrow \lambda \Delta t$$

- Sannsynet for at det inntreff meir enn ei hending innanfor eit lite tidsintervall er neglisjerbart

$$P(\text{"}X \geq 2\text{" i intervallet } [t, t + \Delta t)) = o(\Delta t) \rightarrow 0$$

Merk: me kan byte ut tid med for eksempel distanse, areal, volum

Poissonfordelinga II

Poissonfordelinga

La X vere talet på hendingar i eit tidsintervall av lengde t. X er poissonfordelt med

$$f(x;\lambda t) = p(x;\lambda t) = \frac{(\lambda t)^x}{x!}\exp(-\lambda t)$$

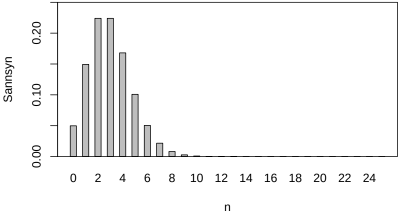
der λ er gjennomsnittleg tal på hendingar per tidseining.

Forventningsverdi og varians

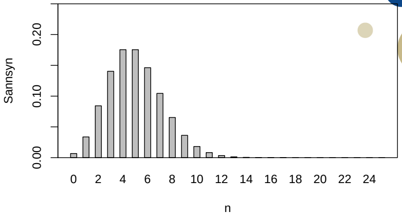
For ein poissonfordelt stokastisk variabel X med parameter λt er:

$$E(X) = \lambda t \qquad \text{og} \qquad Var(X) = \lambda t.$$

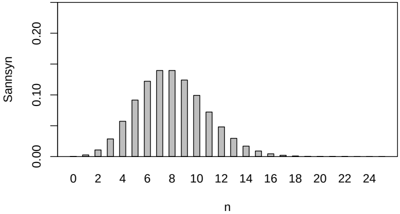
Poissonfordelinga III



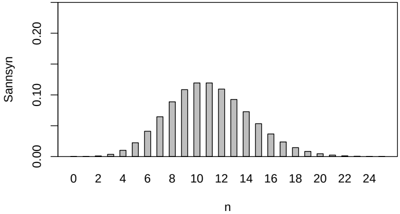
(a) $\mu = 3$



(b) $\mu = 5$



(c) $\mu = 8$



(d) $\mu = 11$

Eksempel (buss) I

X = talet på busser som passerer Samfundet i løpet av 5 minutt
$\lambda = 3$ busser/min
$X \sim$ Poisson($\lambda = 5 \cdot 3 = 15$)

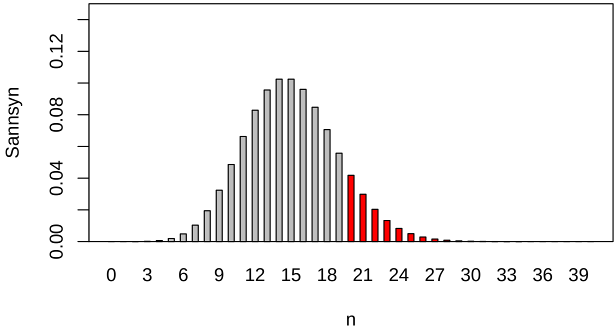


Figure: $P(X > 20)$

Eksempel (buss) II

Poissonfordeling

$P(X \leq x)$

$x \backslash \mu$	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0005	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0028	.0012	.0005	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0103	.0049	.0023	.0011	.0005	.0002	.0001	.0000	.0000
4	.0293	.0151	.0076	.0037	.0018	.0009	.0004	.0002	.0001
5	.0671	.0375	.0203	.0107	.0055	.0028	.0014	.0007	.0003
6	.1301	.0786	.0458	.0259	.0142	.0076	.0040	.0021	.0010
7	.2202	.1432	.0895	.0540	.0316	.0180	.0100	.0054	.0029
8	.3328	.2320	.1550	.0998	.0621	.0374	.0220	.0126	.0071
9	.4579	.3405	.2424	.1658	.1094	.0699	.0433	.0261	.0154
10	.5830	.4599	.3472	.2517	.1757	.1185	.0774	.0491	.0304
11	.6968	.5793	.4616	.3532	.2600	.1848	.1270	.0847	.0549
12	.7916	.6887	.5760	.4631	.3585	.2676	.1931	.1350	.0917
13	.8645	.7813	.6815	.5730	.4644	.3632	.2745	.2009	.1426
14	.9165	.8540	.7720	.6751	.5704	.4657	.3675	.2808	.2081
15	.9513	.9074	.8444	.7636	.6694	.5681	.4667	.3715	.2867
16	.9730	.9441	.8987	.8355	.7559	.6641	.5660	.4677	.3751
17	.9857	.9678	.9370	.8905	.8272	.7489	.6593	.5640	.4686
18	.9928	.9823	.9626	.9302	.8826	.8195	.7423	.6550	.5622
19	.9965	.9907	.9787	.9573	.9235	.8752	.8122	.7363	.6509
20	.9984	.9953	.9884	.9750	.9521	.9170	.8682	.8055	.7307
21	.9993	.9977	.9939	.9859	.9712	.9469	.9108	.8615	.7991
22	.9997	.9990	.9970	.9924	.9833	.9673	.9418	.9047	.8551
23	.9999	.9995	.9985	.9960	.9907	.9805	.9633	.9367	.8989
24	1.0000	.9998	.9993	.9980	.9950	.9888	.9777	.9594	.9317
25	1.0000	.9999	.9997	.9990	.9974	.9938	.9869	.9748	.9554
26	1.0000	1.0000	.9999	.9995	.9987	.9967	.9925	.9848	.9718
27	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9994	.9983	.9959	.9912	.9827
28	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9991	.9978	.9950	.9897
29	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9989	.9973	.9941
30	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9994	.9986	.9967
31	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9993	.9982
32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9990

Samanheng binomisk og poissonfordeling

Teorem

La $X \sim \text{binomisk}(x; n, p)$. Når $n \to \infty$ og $p \to 0$ slik at $\mu = np$ er konstant har me at

$$\text{binomisk}(x; n, p) \to \text{poisson}(x; \mu)$$

Kontinuerleg uniform fordeling

Repetisjon kontinuerleg fordeling

Krav sannsynsfordeling

1. $f(x) \geq 0$ for alle x (kan ha $f(x) > 1$)
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$
3. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Kumulativ fordeling

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \qquad -\infty < x < \infty.$$

Uniform fordelinga

Definisjon

Sannsynstettleiken til ein kontinuerleg uniform stokastisk variabel X på intervallet $[A, B]$ er:

$$f(x; A, B) = \begin{cases} \frac{1}{B-A} & A \leq x \leq B \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}.$$

Forventningsverdi og varians

Forventningsverdien og variansen til ein kontinuerleg uniform stokastisk variabel X er

$$E(X) = \frac{A+B}{2} \qquad Var(X) = \frac{(B-A)^2}{12}.$$

Normalfordelinga

IQ eksempel

X er IQ til ein tilfeldig valgt person

Har observert $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_{10000} = x_{10000}$

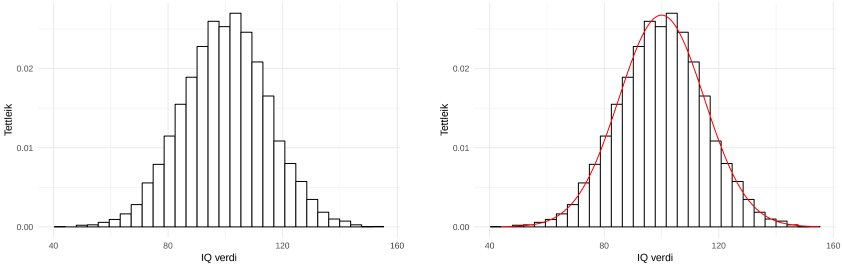


Figure: Observert IQ til 10000 personer

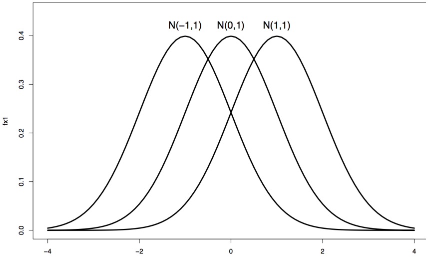
Normalfordelinga

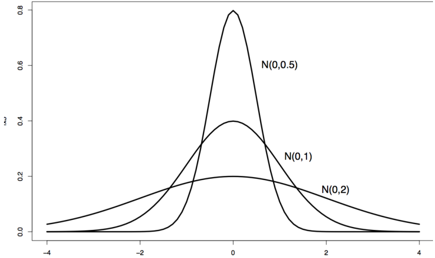
Definisjon

Sannsynstettleiken til ein normalfordelt stokastisk variabel X med forventningsverdi μ og varians σ^2 er

$$f(x;\mu,\sigma) = n(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad -\infty < x < \infty.$$

Korleis ser normalfordelinga ut?





Eigenskapar til normalfordelinga

1. Mode for $x = \mu$
2. Kurva er symmetrisk om $x = \mu$
3. μ er tyngdepunktet til fordelinga ($E(X) = \mu$)
4. Kurva har vendepunkt for $x = \mu \pm \sigma$: den er konkav ned for $\mu - \sigma < x < \mu + \sigma$ og konkav opp elles
5. $\lim_{x \to \pm\infty} n(x; \mu, \sigma) = 0$
6. Arealet under kurva er 1

Neste gong

— meir om normalfordelinga