Noregs teknisk–
naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Sensur: 7. september 2007.

Fagleg kontakt under eksamen:
Henning Omre 73 59 35 31 / 909 37 848

EKSAMEN I EMNE TMA4240/TMA4245 STATISTIKK

Fredag 17. august 2007
Tid: 09:00 – 13:00

Tillatne hjelpemiddel:
Gult A5-ark med eigne handskrivne notatar (stempla ved Institutt for matematiske fag)
Tabeller og formler i statistikk (Tapir forlag)
K. Rottmann: Matematisk formelsamling
Kalkulator: HP30S

NYNORSK

Oppgåve 1 Feil på mobiltelefonar

Sjå på alle mobiltelefonar som blir selde av ein forhandlar. Dei to mest vanlege feila som kan oppstå, kallar vi type 1 og type 2. For ein tilfeldig mobiltelefon kjøpt hos forhandlaren, definerer vi hendingane

F_1 : feil av type 1 oppstår innan 2 år,
F_2 : feil av type 2 oppstår innan 2 år.

La F_1^C vere komplementet til F_1 og tilsvarande F_2^C vere komplementet til F_2.
Gå ut ifrå at $P(F_1) = 0{,}080$, $P(F_2^C) = 0{,}925$ og $P(F_1 \cap F_2) = 0{,}006$.

a) Rekn ut sannsyna $P(F_1 \cup F_2)$, $P(F_1 \mid F_2)$ og $P(F_1^C \cap F_2^C)$.

Er F_1 og F_2 uavhengige? Er F_1 og F_2 disjunkte? Grunngi svara.

Forhandlaren får frå tid til annan klager på mobiltelefonane fordi det er feil på dei. Definér hendinga

$R:$ det blir klaga på ein tilfeldig mobiltelefon innan 2 år.

Gå ut ifrå at $P(R) = 0{,}15$, og at $P(R \mid F_1) = 0{,}90$, $P(R \mid F_2) = 0{,}70$ og $P(R|F_1 \cap F_2) = 0{,}95$.

b) Dersom forhandlaren får ein klage, kva er sannsynet for at dette gjeld ein feil av type 2?

Dersom forhandlaren får ein klage, kva er sannsynet for at dette gjeld ein feil av type 1 eller type 2?

Oppgåve 2 Trafikkmåling

Ein vurderer å utbetre ei lite trafikkert, men farleg vegstrekning i Trondheimsområdet. I det høvet blir du beden om å analysere kor mykje trafikk det er på vegen. La X vere talet på bilar som passerer eit bestemt punkt på vegstrekninga frå kl 16:00 til kl 18:00 på ein tilfeldig valt kvardag. Vi går ut ifrå at X er poissonfordelt med parameter λ, dvs

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \exp\{-\lambda\}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Føreset berre i dette punktet at $\lambda = 15$.

Rekn ut $\mathrm{P}(X > 20)$ og $\mathrm{P}(10 \leq X < 20)$.

Utlei eit uttrykk for $\mathrm{E}(X)$.

Gå ut ifrå at verdien til λ er ukjent i resten av oppgåva. Vi ønskjer no å finne realistiske verdiar for λ. Vi observerer difor talet på passerande bilar frå kl 16:00 til kl 18:00 på n tilfeldig valte kvardagar, $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Vi føreset at observasjonane er uavhengige og identisk fordelte med same poissonfordeling som tidlegare beskrive. Resultatet av målingane for $n = 30$ tilfeldige dagar, $x_1, x_2, \ldots, x_{30}$, gir $\sum_{i=1}^{30} x_i = 359$.

b) Definér estimatoren

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Bruk sentralgrenseteoremet til å utleie eit tilnærma $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ konfidensintervall for λ basert på estimatoren $\hat{\lambda}$.

Rekn ut konfidensintervallet for λ med dei gitte dataene og $\alpha = 0{,}01$.

Kommunen ønskjer å samle inn meir data om kor trafikkert vegen er. Difor blir det også registrert kor mange bilar som passerer på vegen frå kl 18:00 til kl 20:00 på m tilfeldig valte kvardagar, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$. Vi går ut ifrå at observasjonane er uavhengige og identisk poissonfordelte med parameter $\lambda/2$, altså halv intensitet samanlikna med frå kl 16:00 til kl 18:00. Føreset også at $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ er uavhengige av $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

c) Utlei sannsynsmaksimeringsestimatoren (maximum likelihood estimatoren) for λ basert på observasjonane $X_1, X_2, \ldots, X_n$ og $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$.

Oppgåve 3 Tomatproduksjon

Ein gartnar har spesialisert seg på tomatproduksjon i drivhus. Det er kjent at vekta på tomatane er avhengig av lysintensiteten i drivhuset. La Y vere vekta (i gram) på ein vilkårleg tomat og x vere lysintensiteten. Då har ein

$$Y = 100 + \beta(x - x_r) + E,$$

der x_r er ein kjend referanse-lysintensitet som gartnaren tradisjonelt bruker, β er ein ukjend parameter og E er ein normalfordelt (Gaussisk) tilfeldig variabel med forventning 0 g og varians $\sigma^2 = 15^2$ g^2.

Ein sesong har gartnaren brukt referanse-lysintensiteten $x = x_r$ slik at Y er normalfordelt med forventningsverdi 100 g og varians 15^2 g^2. Etter sesongen kontrollerer han tomatane.

a) Rekn ut sannsynet for at ein vilkårleg tomat veg meir enn 110 g.

Rekn ut sannsynet for at ein vilkårleg tomat veg mellom 90 g og 110 g.

Gartnaren hentar ut to vilkårlege tomatar. Rekn ut sannsynet for at den eine er meir enn dobbelt så tung som den andre.

Gartnaren har fem drivhus, og ein sesong ønskjer han å undersøkje korleis tomatane si vekt avhenger av lysintensiteten. Han set lysintensiteten konstant men ulik i dei fem drivhusa.

Etter sesongen vel han ut tre tomatar vilkårleg frå kvart drivhus og veg dei.

b) Utlei ein forventningsrett estimator $\hat{\beta}$ for β basert på observasjonane beskrivne over.

Vis at estimatoren er forventningsrett.

Utlei eit uttrykk for variansen til estimatoren.

Sesongen etter bestemmer han seg for å bruke same konstante lysintensitet x_0, som er ulik x_r, i alle drivhusa.

c) Utlei eit uttrykk for eit 95%-prediksjonsintervall for vekta av ein vilkårleg tomat etter sesongen. Rekn ut talsvar.

For å få talsvar kan du gå ut ifrå at estimatet $\hat{\beta}$ er 2,0, samt at estimatoren for β er normalfordelt med varians 1,20, og at $x_0 - x_r = 5$.