Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:

Ingelin Steinsland	73 55 02 39 / 92 66 30 96
Arild Næss	73 59 20 25 / 99 53 82 94
Øyvind Salvesen	73 59 70 53 / 99 53 83 50

EKSAMEN I EMNE TMA4245 STATISTIKK

20. mai 2008
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: *Tabeller og formler i statistikk*, Tapir Forlag
K. Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Kalkulator HP30S
Gult, stemplet A5-ark med egne håndskrevne notater.

Sensuren faller: 10. juni 2008

Oppgave 1 Poteter

En potetmelfabrikk kjøper poteter levert i standardsekker. Vekten av en sekk poteter varierer fra sekk til sekk. Vi antar at vekten X av en tilfeldig valgt sekk poteter kan modelleres som en normalfordelt stokastisk variabel (tilfeldig variabel) med forventningsverdi $\mu = 50.5\ kg$ og standardavvik $\sigma = 1.0\ kg$. Videre antar vi at vektene av forskjellige sekker kan betraktes som uavhengige.

a) Hvor stor er da sannsynligheten for at en tilfeldig valgt sekk skal veie mindre enn 50.0 kg?

Hvor stor er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt sekk skal veie mindre enn 50.5 kg når vi vet at den er tyngre enn 50.0 kg?

b) Hvor stor er sannsynligheten for at totalvekten av 25 tilfeldig valgte sekker skal overstige 1250.0 kg?

Hvor stor er sannsynligheten for at minst en av tre tilfeldig valgte sekker skal veie mindre enn 50.0 kg?

Ved fabrikken mener de at det er en lineær sammenheng mellom poteters vekt og andelen stivelse. For å undersøke dette nærmere velges det ut 7 poteter. Vekta til hver av disse blir målt, og betegnes med $u_1, \ldots, u_7$. Stivelsesinnholdet (i %) i poteta med vekt u_j, modelleres som en stokastisk variabel Y_j, $j = 1, \ldots, 7$. $Y_1, \ldots, Y_7$ antas uavhengige og normalfordelte med samme standardavvik $\tau = 0.7$ %. Ut fra det en vet, er det naturlig å bruke følgende modell:

$$Y_j = \alpha + \beta\big(u_j - \overline{u}\big) + \epsilon_j\,, \quad j = 1, \ldots, 7\,,$$

der α og β er ukjente konstanter, $\overline{u} = \frac{1}{7}\sum_{j=1}^{7} u_j$, og ϵ_j er normalfordelt med forventning 0 og varians $\tau^2 = 0.7^2$.

c) Vis at minste kvadratsums-estimatorene for henholdsvis α og β blir

$$A = \overline{Y} = \frac{1}{7}\sum_{j=1}^{7} Y_j \quad \text{og} \quad B = \frac{\sum_{j=1}^{7}(u_j - \overline{u})Y_j}{\sum_{j=1}^{7}(u_j - \overline{u})^2}$$

.

Hint: $\sum_{j=1}^{7}(u_j - \bar{u}) = 0$.

d) Vis at A og B begge er forventningsrette, og finn variansene deres.

e) Våre observasjoner er:

j	1	2	3	4	5	6	7
u_j	1.07	1.08	1.09	1.10	1.11	1.12	1.13
y_j	12.3	13.3	15.8	18.7	19.6	23.1	24.3

slik at $\bar{u} = 1.10$, $\bar{y} = 18.16$, $\sum_{j=1}^{n}(u_j - \bar{u})y_j = 0.59$ og $\sum_{j=1}^{n}(u_j - \bar{u})^2 = 0.0028$.

Vi ønsker nå å predikere stivelsesinnholdet i en ny potet med vekt $u_0 = 1.115$. Benytt prediktoren $\hat{Y}_0 = A + B(u_0 - \bar{u})$, der $\bar{u} = \sum_{j=1}^{7} u_j/7$.

Hva blir predikert stivelsesinnhold for en potet med $u_0 = 1.115$?

Hvilken fordeling har feilen $\hat{Y}_0 - Y_0$? Begrunn svaret, og finn forventning og varians (du kan uten bevis bruke at A og B er uavhengige).

Benytt dette til å sette opp et 95% prediksjonsintervall for Y_0. Finn tallsvar.

Oppgave 2 Fire-på-rad

Petter og Katrine spiller fire-på-rad. La p være sannsynligheten for at Katrine vinner et spill, og anta at spillene er uavhengige av hverandre.

a) Anta bare i dette punktet at $p = 0.4$.

Hva er sannsynligheten for at Petter vinner det første spillet og Katrine de to neste?

De spiller sju spill. La X være antallet spill Katrine vinner. Hvilken fordeling har X? Begrunn svaret / diskuter antagelsene.

Hva er sannsynligheten for at Katrine vinner akkurat ett av de sju spillene?

b) La nå p være en ukjent parameter. Vi ønsker å estimere p ut fra resultatet av de $n = 7$ spillene. La resultatene være $Z_1, Z_2, \ldots, Z_7$ der $Z_i = 0$ dersom Petter vinner det i-te spillet og $Z_i = 1$ dersom Katrine vinner.

Vis at sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (maximum likelihood-estimatoren) for p er $\hat{p} = \sum_{i=1}^{n} Z_i/n$ $(= X/n)$.

Hva blir estimert p dersom resultatene er: $1, 1, 0, 0, 1, 0, 0$, d.v.s. $x = 3$.

c) Finn forventning og varians for $\hat{p}$.

d) Petter påstår at han er flinkere enn Katrine i fire-på-rad. Formuler dette som en hypotesetest, og test hypotesa med signifikansnivå 0.05 når $x = 3$.

e) Finn styrken til testen over dersom den sanne verdien for p er $p_1 = 0.1$.
Hvor stor må n være dersom styrken for $p_1 = 0.1$ skal være minst 0.8.