Noreg teknisk–
naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Nynorsk

Fagleg kontakt under eksamen:
Henning Omre 73 59 35 31
Hugo Hammer 452 10 184

EKSAMEN I EMNE TMA4240 STATISTIKK

Torsdag 8. desember 2005
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemiddel: *Tabeller og formler i statistikk*, Tapir Forlag
K. Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Gult A5 ark (IMF stempla) med eigne handskrivne notat
Kalkulator HP30S

Sensurfrist: 5. januar 2003

Oppgåve 1 Søtsaker i matvareforretning

Det er kjent at matvareforretningar strategisk plasserer søtsaker i nærleiken av kassene i forretninga for å hjelpe på salget. Ein butikkeigar har til no hatt søtsakene plassert tilfeldig rundt i butikken og erfart at kundane uavhengig av kvarandre kjøper søtsaker med sannsyn $p_0 = 0.25$.

a) I løpet av ein time handla 20 personar i butikken hans. La X vere talet på kundar blant desse som handla søtsaker. Under kva for føresetnader er X binomisk fordelt? Føreset at X er binomisk fordelt, kva er då $P(X \leq 5)$ og $P(5 \leq X < 10)$?

Butikkeigaren ønskjer å teste om strategien med å plassere søtsakene i nærleiken av kassene i butikken kan hjelpe på salget også i butikken hans, dvs. at personar handlar søtsaker med større sannsyn enn $p_0 = 0.25$. Han plasserer difor no søtsakene i nærleiken av kassene og observerer i ei undersøking at av n tilfeldig valde kundar handla no X kundar søtsaker. Føreset at $X \sim b(x; n, p)$, dvs. binomisk fordelt med parametrar n og p og at p er ukjent.

b) Vis at sannsynsmaksimeringsestimatoren (maximum likelihood estimatoren) for p er

$$\hat{p} = \frac{X}{n}.$$

Rekn ut forventning og varians til estimatoren $\hat{p}$.

Føreset at $n = 18$ i undersøkinga over og at 8 av desse kundene handla søtsaker.

c) Sel butikkeigaren meir søtsaker ved å plassere søtsakene i nærleiken av kassene? Formuler problemet som ein hypotesetest. Kva blir avgjerda i testen med eit signifikansnivå 0.05? (Merk at talet på observasjonar *ikkje* er tilstrekkeleg til at sentralgrenseteoremet kan nyttast i testen).

Oppgåve 2 Kulepenn-forhandlaren

Ein forhandlar kjøper inn eit stort parti kulepennar og sel det vidare til kundar. Han får klage på alle kulepennar som ikkje verkar. Føreset først at talet på klager, X, er poissonfordelt med parameter $\lambda > 0$:

$$p(x; \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad ; x = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Finn eit uttrykk for sannsynet for at forhandlaren får ei eller fleire klager. Utlei eit uttrykk for sannsynet for at forhandlaren får mindre enn tre klager, gitt at han får ei eller flere klager.

Leverandøren av kulepennar har tre fabrikkar, kalla A, B og C, som produserer med ulik kvalitet. Forhandlaren får varepartiet frå ein av fabrikkane men han veit ikkje frå kva for ein. Dersom varepartiet kjem frå fabrikk A vil talet på klager vere poissonfordelt med parameter $\lambda_A = 5$, dersom partiet er frå fabrikk B og C er klagefordelingsparameteren høvesvis $\lambda_B = 15$ og $\lambda_C = 20$. Forhandlaren føreset i utgangspunktet at det er sannsyn $p_A = 0.5$ for at varepartiet kjem frå fabrikk A og sannsyn $p_B = p_C = 0.25$ for kvar av fabrikkane B og C.

b) Utlei eit uttrykk for den marginale sannsynsfordelinga for talet på klager forhandlaren kan rekne med å få.

Utlei uttrykk for både forventa tal på klager og variansen i talet på klager han tar imot når han sel varepartiet med kulepennar. Set inn verdiane for λ_A, λ_B og λ_C samt for p_A, p_B og p_C, og rekn ut talsvara.

Etter å ha selt heile varepartiet registrerer forhandlaren at han har tatt imot $x = 13$ klager.

c) Utlei eit uttrykk for sannsynet for at varepartiet kjem frå fabrikk B gitt all informasjonen spesifisert i oppgåva. Set inn verdiane for λ_A, λ_B og λ_C, p_A, p_B og p_C samt x, og rekn ut talsvaret.

Oppgåve 3 Slitasje på bildekk

Ein bildekkfabrikant ønskjer å undersøke slitasjeraten på ein viss type dekk. Han set opp følgjande modell som er gyldig for forholdsvis nye dekk:

$$Y = d_0 - \beta x + \varepsilon,$$

der Y representerer mønsterdjupna på dekka, x er antal kilometer køyrt, d_0 er ei kjent, konstant mønsterdjupne i nye dekk og β er den ukjente slitasjeraten som skal bestemmast. Feilleddet ε vert føresett å vere normalfordelt (Gaussisk) $n(\varepsilon; 0, \sigma)$ der variansen σ^2 er ukjent.

Fabrikanten planlegger å leige inn n testkøyrarar som skal bruke dekka i forskjellige antal kilometer, x, og deretter måle mønsterdjupne, Y. Observasjonane blir då Y_1, Y_2, $\ldots, Y_n$ som er uavhengig og fordelte slik at $Y_i \sim n(y_i; d_0 - \beta x_i, \sigma)\,;\;\; i = 1, \ldots, n.$

Fabrikanten bruker følgjande estimatorar for dei ukjente β og σ^2:

$$B = \frac{d_0 \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - d_0 + Bx_i)^2.$$

a) Vis at B er ein forventningsrett estimator for β. Utlei variansen til estimatoren B.

Estimatoren B er normalfordelt (Gaussisk), forklar kvifor.

b) Utlei eit 95% konfidensintervall for slitasjeraten β.

Bildekk må ikkje vere for 'blaute' eller for 'harde'. Standarden tilseier at slitasjeraten skal vere β_0. Skissér ein testprosedyre for $H_0 : \beta = \beta_0$ mot $H_1 : \beta \neq \beta_0$ med signifikansnivå 0.05.