Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Sensur: 7. september 2007.

Faglig kontakt under eksamen:
Henning Omre 73 59 35 31 / 909 37 848

EKSAMEN I EMNE TMA4240/TMA4245 STATISTIKK

Fredag 17. august 2007
Tid: 09:00 – 13:00

Tillatte hjelpemidler:
Gult A5-ark med egne håndskrevne notater (stemplet ved Institutt for matematiske fag)
Tabeller og formler i statistikk (Tapir forlag)
K. Rottmann: Matematisk formelsamling
Kalkulator: HP30S

BOKMÅL

Oppgave 1 Feil på mobiltelefoner

Betrakt alle mobiltelefoner som selges av en forhandler. De to mest vanlige feilene som kan oppstå, betegnes type 1 og type 2. For en tilfeldig mobiltelefon kjøpt hos forhandleren, definerer vi hendelsene

F_1 : feil av type 1 oppstår innen 2 år,
F_2 : feil av type 2 oppstår innen 2 år.

La F_1^C være komplementet til F_1 og tilsvarende F_2^C være komplementet til F_2.
Anta at $P(F_1) = 0{,}080$, $P(F_2^C) = 0{,}925$ og $P(F_1 \cap F_2) = 0{,}006$.

a) Regn ut sannsynlighetene $P(F_1 \cup F_2)$, $P(F_1 \mid F_2)$ og $P(F_1^C \cap F_2^C)$.

Er F_1 og F_2 uavhengige? Er F_1 og F_2 disjunkte? Begrunn svarene.

Forhandleren mottar fra tid til annen klager på mobiltelefonene fordi det er feil på dem. Definér hendelsen

$R:$ det klages på en tilfeldig mobiltelefon innen 2 år.

Anta at $P(R) = 0{,}15$, og at $P(R \mid F_1) = 0{,}90$, $P(R \mid F_2) = 0{,}70$ og $P(R|F_1 \cap F_2) = 0{,}95$.

b) Dersom forhandleren mottar en klage, hva er sannsynligheten for at dette gjelder en feil av type 2?

Dersom forhandleren mottar en klage, hva er sannsynligheten for at dette gjelder en feil av type 1 eller type 2?

Oppgave 2 Trafikkmåling

Det vurderes å utbedre en lite trafikkert, men farlig veistrekning i Trondheimsområdet. I den sammenheng blir du bedt om å analysere hvor mye trafikk det er på veien. La X være antall biler som passerer et bestemt punkt på veistrekningen fra kl 16:00 til kl 18:00 på en tilfeldig valgt hverdag. Vi antar at X er poissonfordelt med parameter λ, dvs

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \exp\{-\lambda\}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Anta bare i dette punktet at $\lambda = 15$.

Regn ut $\mathrm{P}(X > 20)$ og $\mathrm{P}(10 \leq X < 20)$.

Utled et uttrykk for $\mathrm{E}(X)$.

Anta at verdien til λ er ukjent i resten av oppgaven. Vi ønsker nå å finne realistiske verdier for λ. Vi observerer derfor antall passerende biler fra kl 16:00 til kl 18:00 på n tilfeldig valgte hverdager, $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Vi antar at observasjonene er uavhengige og identisk fordelt med samme poissonfordeling som tidligere beskrevet. Resultatet av målingene for $n = 30$ tilfeldige dager, $x_1, x_2, \ldots, x_{30}$, gir $\sum_{i=1}^{30} x_i = 359$.

b) Definér estimatoren

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Bruk sentralgrenseteoremet til å utlede et tilnærmet $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ konfidensintervall for λ basert på estimatoren $\hat{\lambda}$.

Regn ut konfidensintervallet for λ med de gitte dataene og $\alpha = 0{,}01$.

Kommunen ønsker å samle inn mer data om hvor trafikkert veien er. Derfor registreres det også hvor mange biler som passerer på veien fra kl 18:00 til kl 20:00 på m tilfeldig valgte hverdager, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$. Vi antar at observasjonene er uavhengige og identisk poissonfordelte med parameter $\lambda/2$, altså halv intensitet i forhold til fra kl 16:00 til kl 18:00. Anta også at $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ er uavhengige av $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

c) Utled sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (maximum likelihood estimatoren) for λ basert på observasjonene $X_1, X_2, \ldots, X_n$ og $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$.

Oppgave 3 Tomatproduksjon

En gartner har spesialisert seg på tomatproduksjon i drivhus. Det er kjent at vekten på tomatene er avhengig av lysintensiteten i drivhuset. La Y være vekten (i gram) på en vilkårlig tomat og x være lysintensiteten. Da har en

$$Y = 100 + \beta(x - x_r) + E,$$

hvor x_r er en kjent referanse-lysintensitet som gartneren tradisjonelt bruker, β er en ukjent parameter og E er en normalfordelt (Gaussisk) tilfeldig variabel med forventning 0 g og varians $\sigma^2 = 15^2$ g^2.

En sesong har gartneren brukt referanse-lysintensiteten $x = x_r$ slik at Y er normalfordelt med forventningsverdi 100 g og varians 15^2 g^2. Etter sesongen kontrollerer han tomatene.

a) Regn ut sannsynligheten for at en vilkårlig tomat veier mer enn 110 g.

Regn ut sannsynligheten for at en vilkårlig tomat veier mellom 90 g og 110 g.

Gartneren henter ut to vilkårlige tomater. Regn ut sannynligheten for at den ene er mer enn dobbelt så tung som den andre.

Gartneren har fem drivhus, og en sesong ønsker han å undersøke hvordan tomatenes vekt avhenger av lysintensiteten. Han setter lysintensiteten konstant men ulik i de fem drivhusene.

Etter sesongen velger han ut tre tomater vilkårlig fra hvert drivhus og veier dem.

b) Utled en forventningsrett estimator $\hat{\beta}$ for β basert på observasjonene beskrevet over.

Vis at estimatoren er forventningsrett.

Utled et uttrykk for variansen til estimatoren.

Sesongen etter bestemmer han seg for å bruke samme konstante lysintensitet x_0, som er ulik x_r, i alle drivhusene.

c) Utled et uttrykk for et 95%-prediksjonsintervall for vekten av en vilkårlig tomat etter sesongen. Regn ut tallsvar.

For å få tallsvar kan du anta at estimatet $\hat{\beta}$ er 2,0, samt at estimatoren for β er normalfordelt med varians 1,20, og at $x_0 - x_r = 5$.