Noregs teknisk–
naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Faglege kontakter under eksamen:
Turid Follestad 98066880
Jo Eidsvik 90127472
Mette Langaas 98847649

EKSAMEN I FAG TMA4245 STATISTIKK

Fredag 19.mai 2006

Tid: 09:00–13:00

Tillatne hjelpemiddel:
Gult A5-ark med eigne handskrivne notatar.
Tabeller og formler i statistikk (Tapir Forlag).
K. Rottmann: *Matematisk formelsamling.*
Kalkulator: HP30S.

NYNORSK

Sensur: 14.juni 2006.

Oppgåve 1 Feil på mobilnett

La tida X (målt i veker) mellom to påfølgjande feil i eit mobilnett vere ein kontinuerlig stokastisk variabel med sannsynstettleik

$$f(x) = \beta x^{-\beta-1}, \quad x > 1,\ \beta > 1.$$

a) Vis at den kumulative fordelingsfunksjonen, $F(x)$, for X er $F(x) = 1 - x^{-\beta}$, for $x > 1$.

Føreset i resten av dette punktet at $\beta = 3$.

Kva er sannsynet for at det tar meir enn 2 veker mellom to påfølgjande feil?

Dersom det er gått 2 veker sidan sist det var ein feil på nettet, kva er sannsynet for at det sviktar innan det er gått 3.5 veker frå siste feil?

Vi vil estimere parameteren β basert på data for tidlegare tilfelle av feil på nettet. La $X_i,\ i = 1,\ldots,n$ vere lengda på n tidsintervall (målt i veker) mellom to påfølgjande feil. Vi føreset at $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er uavhengige og identisk fordelte stokastiske variablar, med sannsynstettleik $f(x)$ som gitt i starten av oppgåva.

Tre alternative estimatorar for β er

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(X_i)}, \quad \hat{\beta}_2 = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n \ln(X_i)} \quad \text{og} \quad \hat{\beta}_3 = \frac{\sum_{i=1}^n \ln(X_i)}{n},$$

der ln er den naturlige logaritmen.

b) Kva for ein av estimatorane over er sannsynsmaksimeringsestimatoren (SME)? Grunngi svaret ved å utleie SME. Berekn estimatet når $n = 10$ og dei observerte verdiane er som følgjer:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
1.23	2.04	1.27	1.79	1.10	1.29	2.74	1.15	1.10	1.06

Det blir oppgitt at $\sum_{i=1}^{10} \ln(x_i) = 3.39$.

c) Vis at $2\beta \ln(X_i)$ er kjikvadratfordelt med 2 fridomsgrader, og vidare at $2\beta \sum_{i=1}^n \ln(X_i)$ er kjikvadratfordelt med $2n$ fridomsgrader.

Utlei eit 95% konfidensintervall for β. Kva blir intervallet når dataene er som i punkt b)?

Oppgåve 2 Transport av masse

Ein entreprenør har leigd inn eit transportfirma til å transportere masse bort frå ein byggeplass. Det er to moglege vegvalg frå byggeplassen til staden der massen skal deponerast, gjennom eller utanom bykjerna. Av omsyn til helse, miljø og tryggleik velger entreprenøren at massen skal transporterast utanom bykjerna.

Når oppdraget er ferdig har transportfirmaet køyrt 1000 turar, og transportfirmaet informerer entreprenøren om at av dei 1000 turane har 5 blitt køyrde gjennom bykjerna og 995 er blitt køyrde utanom bykjerna.

I løpet av transportperioden har entreprenøren ved 5 tilfeldig valgte transportar sjekka om transporten har skjedd gjennom bykjerna. La X vere antal gongar, av dei 5 transportene som blei sjekka, entreprenøren finn at massen er blitt transportert gjennom bykjerna.

Kva for ei fordeling har X? Grunngi svaret.

Kva for ein verdi av X har høgast punktsannsyn?

No viser det seg at entreprenøren fann at i 5 av dei 5 tilfella han sjekka så blei massen transportert gjennom bykjerna. Kva er sannsynet for dette, dvs. $P(X = 5)$?

Oppgåve 3 Trykkfastleik av murblokker

Ved ei verksemd blir det produsert ein spesiell type murblokker, og vi skal i denne oppgåva sjå på trykkfastleiken, Y, til murblokkene. Med trykkfastleik blir det meint det maksimale trykket ei murblokk kan utsettast for utan at ho blir skada. Føreset at Y er normalfordelt med forventningsverdi $\mu = \mathrm{E}(Y)$, gitt i MPa (10^6 Pascal), og standardavvik $\sigma = \mathrm{SD}(Y) = 0.21$ MPa.

a) Føreset i dette punktet at $\mu = 2.10$ MPa.

Kva er sannsynet for at ei tilfeldig valgt murblokk har ein trykkfastleik som er høgare enn 1.83 MPa, dvs. $P(Y > 1.83)$?

Kva er sannsynet for at ei tilfeldig valgt murblokk har ein trykkfastleik som avviker mindre enn 0.3 MPa frå forventningsverdien $\mu = 2.10$ MPa?

Vi ser på måling av trykkfastleik for $n = 24$ tilfeldig valgte murblokker frå produksjonen. Kva er sannsynet for at den minste målinga vil vere lavare enn 1.83 MPa?

Verksemda har starta produksjon av ein ny type murblokker, som dei meiner har forventa trykkfastleik $\mu = 2.40$ MPa. Føreset at det er kjent at standardavviket til trykkfastleiken til dei nye murblokkene er $\sigma = 0.21$ MPa. Verksemda ønskjer å undersøke om det er grunn til å tru at forventa trykkfastleik for den nye typen murblokker er lavare enn 2.40 MPa.

b) Formulér dette som ein hypotesetest ved å definere nullhypotese og alternativ hypotese.

Set opp ein testobservator og finn forkastningsområdet til testen, når vi ønskjer å bruke signifikansnivå $\alpha = 0.05$.

Kva blir konklusjonen på testen, når vi har observert trykkfastleik til $n = 24$ murblokker, og gjennomsnittleg trykkfastleik blei 2.30 MPa?

Bestem teststyrken til den alternative hypotesten $H_1 : \mu = 2.30$ MPa for signifikansnivå 0.05 og $n = 24$ observasjonar.

Oppgåve 4 Hubble

Ei viktig vitskapleg oppdaging fann stad i 1929 då Edwin Hubble oppdaga at universet er ekspanderande. Hubble sitt talmateriale omfatta blant anna x_i = avstanden til galakse i (målt i millionar lysår) og y_i = farten til galakse i (målt i 1000 km/s). Verdiane Hubble brukte i ein av analysene sine er som følgjer:

Namn	Avstand, x_i	Fart, y_i
Virgo	22	1.2
Pegasus	68	3.8
Perseus	108	5.1
Coma Berenices	137	7.5
Ursa Major 1	255	14.9
Leo	315	19.2
Corona Borealis	390	21.4
Gemini	405	23.0
Bootes	685	39.2
Ursa Major 2	700	41.6
Hydra	1100	60.8

Det blir her oppgitt at $\sum_{i=1}^{11} x_i = 4185$, $\sum_{i=1}^{11} y_i = 237.7$, $\sum_{i=1}^{11} x_i^2 = 2685141$ og $\sum_{i=1}^{11} x_i y_i = 152220$.

Hubble foreslo ein modell for fart som funksjon av avstand på forma $y = \beta x$, der β seinere har blitt kalla Hubble's konstant. Ein statistisk versjon av likninga kan bli gitt ved:

$$Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, 11, \tag{1}$$

der ε_i, $i = 1, \ldots, 11$, er uavhengige og normalfordelte stokastiske variablar med forventning 0 og varians σ^2.

a) Vi vil i første omgang finne ein estimator for β.

Bruk minste kvadraters metode (method of least squares) til å estimere β med utgangspunkt i likning (1), og vis at estimatoren for β då blir gitt ved $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{11} x_i Y_i}{\sum_{i=1}^{11} x_i^2}$. Rekn ut estimatet for β basert på dataene over.

Finn også forventning og varians til $\hat{\beta}$.

b) Føreset at ein annan galakse befinner seg ein avstand $x_0 = 900$ millionar lysår borte.

Finn predikert fart, $\hat{y}_0$, til denne galaksen.

Utlei eit 95% prediksjonsintervall for ei måling av farten til denne galaksen. Det blir oppgitt at $\sum_{i=1}^{11}(y_i - \hat{y}_i)^2 = 9.87$, der $\hat{y}_i = \hat{\beta} x_i$.