Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:
Henning Omre mtel 90937848

EKSAMEN I EMNE TMA4240 STATISTIKK

14. august 2008
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: *Tabeller og formler i statistikk*, Tapir Forlag
K. Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Kalkulator HP30S
Gult, stemplet A5-ark med egne håndskrevne notater.

Sensuren faller: 4. september 2008

Oppgave 1 Brødristere

En fabrikk produserer brødristere på samlebånd, og ferdig monterte brødristere kommer sekvensielt ut fra produksjonsprosessen. Umiddelbart deretter blir hver enhet kvalitetssikret.

Benevn hendelsen - feil på vilkårlig brødrister - for F, og anta at alle feil blir identifisert i kvalitetstesten.

Av erfaring vet en at tre av hundre brødristere har feil, dvs $P(F) = 0.03$ for en vilkårlig enhet. Anta videre at feilen oppstår uavhengig av hverandre.

En kvalitetsingeniør starter morgenskiftet.

a) Hva er sannsynligheten for at hun/han finner feil på de to første brødristerene?

Hva er sannsynligheten for at hun/han finner feil på to av de syv første brødristerene?

Hva er sannsynligheten for at de to første brødristerene har feil gitt at det er to feil på de syv første brødristerene?

b) Hva er sannsynligheten for at hun/han må teste mer enn fem brødristere før den første feilen finnes?

Hva er sannsynligheten for at feil på to påfølgende brødristere ikke forekommer blant de fem første enhetene?

Det kan oppstå to typer feil på brødristerene, benevn dem F_1 og F_2, og en har $F = F_1 \cup F_2$. F_1 er skjønnhetsfeil og F_2 er funksjonsfeil. Det er mye enklere å identifisere skjønnhetsfeil, F_1, enn funksjonsfeil, F_2.

Erfaring tilsier at to av hundre brødristere har skjønnhetsfeil, dvs $P(F_1) = 0.02$ for en vilkårlig enhet. Videre er det avhengighet mellom feiltypene slik at $P(F_2 \mid F_1) = 0.4$.

c) For å effektivisere kvalitetssikringsprosessen velger en å teste kun for skjønnhetsfeil F_1.

Hva er da sannsynligheten for at en brødrister med feil slipper igjennom kvalitetssikringen?

Hvor stor andel av funksjonsfeilene F_2 blir da avslørt i kvalitetstesten?

Oppgave 2 Sensoren

En sensormåling, X, av en verdi a antas å være Gaussisk (normal) fordelt, forventningsrett og ha varians σ^2. Det vil si at X er $n(x; a, \sigma)$.

a) Anta bare i dette punket at a og σ^2 er kjente og har verdier $a = 2.0$ og $\sigma^2 = 0.04$.

Regn ut følgende sannsynligheter:

$P(X \geq 1.9)$

$P(1.8 \leq X \leq 2.4)$

$P(X \leq 2.4 \mid X \geq 1.9)$

Anta heretter at både a og σ^2 er ukjente konstanter.

Anta videre at $X_1, \ldots, X_{10}$ er $n = 10$ uavhengige sensormålinger med fordeling $n(x; a, \sigma)$. Det oppgis at $\sum_{i=1}^{10} x_i = 21.0$ og $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 45.0$.

Betrakt følgende estimator for den ukjente målevariansen σ^2:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \tag{1}$$

med $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

b) Spesifiser sannsynlighetsfordelingen til den tilfeldige variabelen:

$$V = \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \tag{2}$$

Skriv opp uttrykket for den tilhørende sannsynlighetstettheten, dvs $f(v)$.

Vi at estimatoren $\hat{\sigma}^2$ er en forventningsrett estimator for variansen σ^2.

Utled et uttrykk for variansen til estimatoren $\hat{\sigma}^2$.

c) Utled et uttrykk for 0.90-konfidensintervall for σ^2.

Regn ut tallsvar basert på tallverdiene gitt over.

d) Utled et uttrykk for sannsynlighetstettheten til estimatoren $\hat{\sigma}^2$.

Hvilken klasse av fordelinger tilhører denne tettheten?

Spesifiser også de tilhørende parameterverdiene.

Bruk disse resultatene til å vise at estimatoren $\hat{\sigma}^2$ er forventningsrett for σ^2, samt til å utlede variansen til estimatoren $\hat{\sigma}^2$.

Hvorfor er ikke denne sannsynlighetstettheten for $\hat{\sigma}^2$ velegnet til å lage konfidensintervaller fra?

Oppgave 3 SME-utledning

Betrakt en Paretofordelt variabel X, med ukjent parameter β. Herav:

$$f(x;\beta) = \frac{\beta\ 2^\beta}{x^{\beta+1}} \quad ; \quad 2 < x < \infty \tag{3}$$

Anta at $X_1, \ldots, X_n$ er uavhengige tilfeldige variable fra $f(x;\beta)$

a) Utled sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren for β.