Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Nynorsk

Fagleg kontakt under eksamen:

Ingelin Steinsland	73 55 02 39 / 92 66 30 96
Arild Næss	73 59 20 25 / 99 53 82 94
Øyvind Salvesen	73 59 70 53 / 99 53 83 50

EKSAMEN I EMNE TMA4245 STATISTIKK

20. mai 2008
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemiddel: *Tabeller og formler i statistikk*, Tapir Forlag
K. Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Kalkulator HP30S
Gult, stempla A5-ark med eigne handskrivne notat.

Sensuren fell: 10. juni 2008

Oppgåve 1 Poteter

Ein potetmjølfabrikk kjøper poteter levert i standardsekkar. Vekta av ein sekk poteter varierer frå sekk til sekk. Vi antar at vekta X av ein tilfeldig valgt sekk poteter kan modellerast som ein normalfordelt stokastisk variabel (tilfeldig variabel) med forventningsverdi $\mu = 50.5\ kg$ og standardavvik $\sigma = 1.0\ kg$. Vidare antar vi at vekta av forskjellege sekkar kan bli sett på som uavhengige.

a) Kva er sannsynet for at ein tilfeldig valgt sekk veg mindre enn 50.0 kg?

Kva er sannsynet for at ein tilfeldig valgt sekk skal vege mindre enn 50.5 kg når vi veit at den er tyngre enn 50.0 kg?

b) Kva er sannsynet for at totalvekta av 25 tilfeldig valgte sekkar skal overstige 1250.0 kg?

Kva er sannsynet for at minst ein av tre tilfeldig valgte sekkar skal vege mindre enn 50.0 kg?

Ved fabrikken meiner dei at det er ein lineær samanheng mellom vekta til poteter og andelen stivelse. For å undersøke dette nærare vel ein ut 7 poteter. Vekta til kvar av desse blir målt, og blir beteikna $u_1, \dots, u_7$. Stivelsesinnhaldet (i %) i poteta med vekt u_j, blir modellet som ein stokastisk variabel Y_j, $j = 1, \dots, 7$. Vi antar at $Y_1, \dots, Y_7$ er uavhengige og normalfordelte med same standardavvik $\tau = 0.7$ %. Ut frå det ein veit, er det naturleg å bruke følgjande modell:

$$Y_j = \alpha + \beta\big(u_j - \overline{u}\big) + \epsilon_j\,, \quad j = 1, \dots, 7\,,$$

der α og β er ukjende konstantar, $\overline{u} = \frac{1}{7}\sum_{j=1}^{7} u_j$, og ϵ_j er normalfordelt med forventning 0 og varians $\tau^2 = 0.7^2$.

c) Vis at minste kvadratsums-estimatorane for henholdsvis α og β blir

$$A = \overline{Y} = \frac{1}{7}\sum_{j=1}^{7} Y_j \quad \text{og} \quad B = \frac{\sum_{j=1}^{7}(u_j - \overline{u})Y_j}{\sum_{j=1}^{7}(u_j - \overline{u})^2}$$

.

Hint: $\sum_{j=1}^{7}(u_j - \bar{u}) = 0$.

d) Vis at A og B begge er forventningsrette, og finn variansane deira.

e) Våre observasjonar er:

j	1	2	3	4	5	6	7
u_j	1.07	1.08	1.09	1.10	1.11	1.12	1.13
y_j	12.3	13.3	15.8	18.7	19.6	23.1	24.3

slik at $\bar{u} = 1.10$, $\bar{y} = 18.16$, $\sum_{j=1}^{n}(u_j - \bar{u})y_j = 0.59$ og $\sum_{j=1}^{n}(u_j - \bar{u})^2 = 0.0028$.

Vi ønsker no å predikere stivelsesinnhaldet i ei ny potet med vekt $u_0 = 1.115$. Bruk prediktoren $\hat{Y}_0 = A + B(u_0 - \bar{u})$, der $\bar{u} = \sum_{j=1}^{7} u_j/7$.

Kva blir predikert stivelsesinnhald for ei potet med $u_0 = 1.115$?

Kva fordeling har feilen $\hat{Y}_0 - Y_0$? Grunngje svaret, og finn forventning og varians (du kan utan bevis bruke at A og B er uavhengige).

Nytt dette til å sette opp eit 95% prediksjonsintervall for Y_0. Finn talsvar.

Oppgåve 2 Fire-på-rad

Petter og Katrine speler fire-på-rad. La p vere sannsynet for at Katrine vinn eit spel, og anta at spela er uavhengige av kvarandre.

a) Anta berre i dette punktet at $p = 0.4$.

Kva er sannsynet for at Petter vinn det første spelet og Katrine dei to neste?

Dei speler sju spill. La X vere tallet på spel Katrine vinn. Kva fordeling har X? Grunngje svaret / diskuter antakingane.

Kva er sannsynet for at Katrine vinn akkurat eitt av dei sju spela?

b) La no p vere ein ukjent parameter. Vi ønsker å estimere p ut frå resultatet av dei $n = 7$ spela. La resultata vere $Z_1, Z_2, \ldots, Z_7$ der $Z_i = 0$ dersom Petter vinn det i-te spelet og $Z_i = 1$ dersom Katrine vinn.

Vis at sannsynsmaksimeringsestimatoren (maximum likelihood-estimatoren) for p er $\hat{p} = \sum_{i=1}^{n} Z_i/n \ (= X/n)$.

Kva blir estimert p dersom resultata er: $1, 1, 0, 0, 1, 0, 0$, d.v.s. $x = 3$.

c) Finn forventning og varians for $\hat{p}$.

d) Petter påstår at han er flinkare enn Katrine i fire-på-rad. Formuler dette som ein hypotesetest, og test hypotesa med signifikansnivå 0.05 når $x = 3$.

e) Finn styrken til testen over dersom den sanne verdien for p er $p_1 = 0.1$.
Kor stor må n vere dersom styrken for $p_1 = 0.1$ skal vere minst 0.8.