Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Nynorsk

Fagleg kontakt under eksamen:
Odd Kolbjørnsen 73 59 35 20

SIF5060/SIF5062/SIF5505/SIF5506 Statistikk

Onsdag 4. august 2001
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemiddel: Godkjent lommekalkulator med tomt minne.
Statistiske tabeller og formler, Tapir forlag.
K. Rottman: Matematisk formelsamling.
Ordliste utdelt på forelesing.

Oppgave 1

La A og B vere to hendingar der $\mathrm{P}(A \cap B) > 0$. La hendingane C og D vere gjeve ved at $C = A \cap B$ og $D = A \cap B'$, der B' er komplementærhendinga til B.

Teikn hendingane A og B inn i eit venndiagram og skraver i dette venndiagrammet hendingane C og D.

Er hendingane C og D disjunkte? (Grunngje svaret)

Er hendingane C og D uavhengige? (Grunngje svaret)

Oppgave 2

La X og Y vere to uavhengige normalfordelte stokastiske variablar, der $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 1$, $\mathrm{Var}(X) = 1$ og $\mathrm{Var}(Y) = 4$.

Bestem fylgjande sannsyn

$$\mathrm{P}(X \leq 2) \quad , \quad \mathrm{P}(X \leq 2 \cap Y \leq 1) \quad \text{og} \quad \mathrm{P}(X + 2Y > 2).$$

Oppgave 3 Politiske meiningsmålingar

Det er i dag svært vanleg å utføre meiningsmålingar for å skaffe seg informasjon om veljartilslutnaden for dei ulike politiske partiane. Dette blir gjort ved at eit utval av dei med røysterett blir spurde om kva parti dei ville ha røysta på dersom det hadde vore val den dagen. I denne oppgåva skal vi rekne litt på denne situasjonen og vi skal fokusere på tilslutnaden til eitt bestemt parti, som vi kallar P. For å gjere situasjonen noko enklare skal vi sjå bort frå at nokon ikkje vil røyste eller at nokon ikkje vil svare eller svarer usant når dei blir spurde om sitt partival.

La N vere talet på personar med røysterett og la p vere delen av desse N som vil røyste på partiet P. Gå ut frå at n personar blir spurde i meiningsmålinga og la X vere talet på dei av desse n som svarer at dei ville ha røysta på P. Gå til slutt ut frå at dei n personane som blir spurde er trekt tilfeldig utan tilbakelegging frå dei N med røysterett.

a) Forklar kvifor X er hypergeometrisk fordelt.

Forklar kvifor X i denne situasjonen er tilnærma binomisk fordelt med n forsøk og sannsyn p.

Som estimator for p nytter vi $\widehat{p} = X/n$.

b) Bruk at X er tilnærma binomisk fordelt til å finne forventning og varians for $\widehat{p}$.

Dersom partiet P har en tilslutnad på $p = 0.079$ blant dei med røysterett, kor mange personar, n, må ein minst spørje for at standardavviket til $\widehat{p}$ ikkje skal overstige 0.010.

Som kjent kan ei binomisk fordeling tilnærmes med ein normalfordeling dersom np og $n(1-p)$ begge er tilstrekkeleg store. I resten av oppgåva kan du gå ut frå at dette er oppfylt slik at

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

er tilnærma standard normalfordelt.

La $p_0 = 0.079$ vere tilslutnaden til partiet P ved forrige val. Ein ønskjer nå å nytte resultatet av meiningsmålinga for å undersøkje om tilslutnaden om P har gått ned sidan den gong.

c) Formuler dette som eit hypotesetestingsproblem. Vel testobservator og lag ein hypotesetest med signifikansnivå $\alpha = 0.05$.

Kva blir konklusjonen på testen dersom ein har spurt 1000 personar og 52 av desse svarte at dei ville ha røysta på partiet P.

Oppgave 4 Absorpsjon av lys

Når lys av vilkårleg retning treffer ei kule så blir ein viss del av lyset absorbert. Vi kallar denne delen for X. Det kan visast at det er rimeleg å oppfatte X som ein stokastisk variabel med sannsynstettleik

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{for } 0 \le x \le \theta, \\ 0 & \text{elles,} \end{cases}$$

der θ er ein parameter som er avhengig av kula si radius og type overflate.

a) Finn kumulativ fordelingsfunksjon for X, F(x).

Skisser $f(x)$ og $F(x)$.

For $\theta = 2.0$, finn sannsynet $\mathrm{P}(X \le 0.4)$.

Gå ut frå at θ for ei bestemt kule er ukjent. For å skaffe informasjon om θ for denne kula blir n målingar, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, gjort, der $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er uavhengige stokastiske variablar, alle med sannsynstettleik som gjeve over.

b) Vis at sannsynsmaksimeringsestimatoren (SME), $\widehat{\theta}$, for θ er

$$\widehat{\theta} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Vidare i oppgåva innfører vi notasjonen $Y = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ slik at $\widehat{\theta} = Y$.

c) Finn kumulativ fordelingsfunksjon for Y, $G(y) = \mathrm{P}(Y \le y)$.

Bruk så dette til å vise at sannsynstettleiken for Y er

$$g(y) = \begin{cases} \frac{ny^{n-1}}{\theta^n} & \text{for } 0 \le y \le \theta, \\ 0 & \text{elles.} \end{cases}$$

d) Bruk sannsynstettleiken for Y gjeve i punkt **c)** til å vise at estimatoren $\widehat{\theta} = Y$ **ikkje** er forventningsrett.

Finn k slik at $\widetilde{\theta} = kY$ blir ein forventningsrett estimator for θ.

e) Utlei eit 95% konfidensintervall for θ basert på $\widetilde{\theta}$. (Hint: Finn fordelinga til $Z = \widetilde{\theta}/(k\theta)$ og ta utgangspunkt i Z for å utleie konfidensintervallet.)

Rekn og ut intervallet numerisk når $n = 10$ og den største målte verdien er 0.46.