Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:

Håkon Tjelmeland	73 59 35 20
Anne Randi Syversveen	73 59 35 20

EKSAMEN I FAG 75510/75515 STATISTIKK 1

Mandag 18. mai 1998

Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler:
Godkjent lommekalkulator, utdelt ordliste, Statistiske tabeller og formler (Tapir forlag).

Oppgave 1

La X være en kontinuerlig fordelt stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} k(1-x^2) & \text{for } -1 \le x \le 1, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

der k er en konstant.

Bestem k og skisser $f(x)$.

Beregn sannsynlighetene $\mathrm{P}(X \le 0.5)$ og $\mathrm{P}(X \le 0.8 | X > 0.5)$.

Oppgave 2 Bollebakeren

Baker Bollesen baker boller med rosiner og sukater og reklamerer med at forventet antall rosiner i hver bolle er 10 og at forventet antall sukater i hver bolle er 4. Olav er en trofast kunde hos Bollesen og kjøper flere boller hver dag. Olav er svært glad i rosiner og sukater, men har den siste tiden fått inntrykk av at det er blitt færre rosiner og sukater i bollene til Bollesen enn tidligere. Han bestemmer seg for å regne litt på situasjonen. Olav lar X og Y betegne henholdsvis antall rosiner og antall sukater i en tilfeldig valgt bolle. Han antar at X og Y begge er Poisson-fordelte med henholdsvis $\mathrm{E}(X) = \lambda_R$ og $\mathrm{E}(Y) = \lambda_S$. Dessuten antar han at X og Y er uavhengige.

Definer følgende to hendelser:

R: En bolle inneholder minst 10 rosiner.
S: En bolle inneholder minst 4 sukater.

a) Tegn inn hendelsene R og S i et Venn-diagram.

Uttrykk følgende hendelser ved hjelp av R og S og skraver dem i Venn-diagrammet:

A: En bolle inneholder minst 10 rosiner og minst 4 sukater.
B: En bolle inneholder færre enn 10 rosiner, men minst 4 sukater.

Er hendelsene A og B disjunkte? (Begrunn svaret).

b) I dette punktet skal du forutsette at baker Bollesens reklame er korrekt, dvs. at $\lambda_R = 10$ og $\lambda_S = 4$.

Hva er sannsynligheten for at en bolle inneholder minst 10 rosiner?

Hva er sannsynligheten for at summen av rosiner og sukater i en bolle er minst 14?

Dersom Olav kjøper 6 boller, hva er sannsynligheten for at nøyaktig tre av dem skal inneholde færre enn 10 rosiner?

For å undersøke om det virkelig er så mange rosiner i bollene som det reklameres med, kjøper Olav $n = 50$ boller og teller omhyggelig opp antall rosiner i hver av disse bollene. La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ betegne antall rosiner i hver av bollene og anta at dette er uavhengige stokastiske variable med samme fordeling som tidligere.

c) Vis at sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (SME) for λ_R blir

$$\widehat{\lambda}_R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Vis videre at

$$\mathrm{E}(\widehat{\lambda}_R) = \lambda_R \quad \text{og} \quad \mathrm{Var}(\widehat{\lambda}_R) = \frac{\lambda_R}{n}$$

Begrunn at $\widehat{\lambda}_R$ er tilnærmet normalfordelt med forventning og varians som gitt over.

I resten av oppgaven skal du benytte at $\widehat{\lambda}_R$ er tilnærmet normalfordelt. Olav ønsker å sjekke om hans observasjoner gir grunnlag for å påstå at bollene ikke inneholder så mange rosiner som reklamen lover.

d) Formuler dette som et hypotetesetestingsproblem og lag en test for dette formål med (tilnærmet) signifikansnivå α.

Hva blir konklusjonen på testen når $\alpha = 0.05$ og det totalt er 470 rosiner i de 50 bollene?

e) Anta så at $\lambda_R = 9$, dvs. bollene inneholder færre rosiner enn hva reklamen hevder. I hvor mange boller, n, må da Olav sjekke rosinantallet for at en test med signifikansnivå $\alpha = 0.05$ med sannsynlighet 0.9 skal avsløre at $\lambda_R < 10$ (dvs. forkaste H_0)?

Oppgave 3 Levetid av ventiler

Levetiden T (målt i antall døgn) til en ny type ventiler som benyttes på oljeplattformer i Nordsjøen, skal undersøkes. Det antas at T er eksponensialfordelt. Det er velkjent at levetidene er avhengig av blant annet temperatur og trykk der ventilene benyttes, og den kjemiske sammensetningen av oljen som går gjennom ventilene. Effekten av disse forholdene måles som en *stress*-faktor, z, og en vet av erfaring at

$$\mathrm{E}(T) = \frac{\mu}{z}$$

Parameteren μ er altså karakteristisk for en bestemt type ventiler, mens z beskriver miljøet der en ventil benyttes. Levetidene til forskjellige ventiler antas uavhengige.

a) Anta i dette punktet at $\mu = 1000$.

For en ventil med stress-faktor $z = 2.0$, bestem $\mathrm{P}(T \leq 1000)$.

Bestem hvilken stress-faktor en ventil må operere under for at $\mathrm{P}(T \leq 1000) = 0.5$.

Betrakt to ventiler med stress-faktorer henholdsvis $z_1 = 1.0$ og $z_2 = 2.0$ og tilhørende levetider T_1 og T_2. Bestem $\mathrm{P}(T_2 \geq T_1)$.

For å undersøke kvaliteten på den nye typen ventiler har man prøvd ut $n = 10$ ventiler. La $z_1, z_2, \ldots, z_n$ betegne stress-faktorene som disse ventilene opererer under og la $T_1, T_2, \ldots, T_n$ betegne tilhørende levetider. De observerte verdier er gitt i følgende tabell:

Ventil i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_i	1.0	3.4	1.9	2.4	1.2	4.0	3.2	2.2	1.4	3.2
t_i	917	610	978	326	609	88	488	591	2170	28

Det oppgis at $\sum_{i=1}^{n} z_i t_i = 12703.8$.

b) Vis at sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (SME) for μ er gitt ved

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i T_i$$

Er estimatoren forventningsrett? Finn også $\mathrm{Var}(\widehat{\mu})$.

c) Sett opp den moment-genererende funksjon for T_i. Benytt så denne til å vise at

$$V = \frac{2n\widehat{\mu}}{\mu}$$

er χ^2-fordelt med $2n$ frihetsgrader. (Hint: Du kan benytte oppgitte formler for moment-generende funskjoner for eksponensial- og χ^2-fordelingene i formelsamlingen.)

d) Benytt resultatet i punkt **c**) til å utlede et $(1 - \alpha)100\%$ konfidensintervall for μ. Hva blir konfidensintervallet når $\alpha = 0.10$ og dataene er som gitt over?