Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Brynjulf Owren (93021641)

EKSAMEN I NUMERISK LØSNING AV DIFFERENSIALLIGNINGER MED DIFFERANSEMETODER (TMA4212)

Mandag 4. juni 2007
Tid: 09:00–13:00, Sensur: 25.06.2007

Hjelpemidler: Kategori B, alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt enkel kalkulator tillatt. Typegodkjent lommekalkulator med tomt minne.

NB! Du skal kun gjøre 8 av de 10 punktene. Du velger selv hvilke. Svarer du på mer enn 8 vil de kun de 8 *første* i din besvarelse gi uttelling.

Oppgave 1 Gitt S/R-problemet

$$
\begin{aligned}
u_t &= \partial_x(a(x)\partial_x u), \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\
u(x,0) &= f(x), \quad 0 \le x \le 1, \\
u(0,t) &= u(1,t) = 0, \quad t \ge 0.
\end{aligned}
$$

der $a(x)$ er kontinuerlig og positiv i intervallet $[0,1]$.

a) Diskretiser denne ligningen ved å benytte sentraldifferenser i rom, det vil si erstatt ∂_x med $(1/h)\delta_x$, og bruk Eulers metode i tid. Definer vektoren $U^n = [U_1^n, \ldots, U_M^n]^T$, $h = 1/(M+1)$, og vis at differensemetoden oppfyller en rekurrensligning av typen

$$U^{n+1} = CU^n, \qquad C \in \mathbf{R}^{M\times M}$$

Bestem matrisen C.

Svar: Metoden blir

$$\frac{U_m^{n+1}-U_m^n}{k} = \frac{1}{h}\delta_x(a\frac{1}{h}\delta_x U_m^n) = \frac{1}{h^2}(a_{m+1/2}(U_{m+1}^n - U_m^n) - a_{m-1/2}(U_m^n - U_{m-1}^n))$$

så vi kan skrive, med $r = k/h^2$,

$$U_m^{n+1} = ra_{m-1/2}U_{m-1}^n + (1 - r(a_{m-1/2} + a_{m+1/2}))U_m^n + ra_{m+1/2}U_{m+1}^n.$$

Matrisen C blir dermed tridiagonal og vi har

$$C_{m,m} = 1 - r(a_{m-1/2} + a_{m+1/2}), \qquad C_{m+1,m} = C_{m,m+1} = ra_{m+1/2}.$$

b) La $r = k/h^2$ der k er tidsskrittet, $\alpha = \max_{0\le x\le 1} a(x)$, og vis at metoden er stabil for skrittlengder som oppfyller

$$2\alpha r \le 1$$

Hint. Gershgorin's teorem.

Svar: C er symmetrisk, og en kan derfor bruke kravet $\rho(C) \le 1+\nu k$, dessuten har C reelle egenverdier, så vi kan snakke om Gershgorin-intervaller istedet for Gershgorin-disker. Vi noterer oss først at alle sub/superdiagonalelementer i C er positive. Intervall nr m er $I_m = [1 - 2r(a_{m-1/2} + a_{m+1/2}), 1]$, $1 < m < M$, intervallet for linje 1 og M blir inneholdt i I_1 og I_M. Vi sjekker nå at $I_m \subseteq [-1, 1]$ for hver m. Vi trenger altså da kun å konsentrere oss om venstre endepunkt, dvs vi undersøker om

$$-1 \le 1 - 2r(a_{m-1/2} + a_{m+1/2}) \quad \Rightarrow \quad r(a_{m-1/2} + a_{m+1/2}) \le 1$$

Men betingelsen $2\alpha r \le 1$ brukes nå til å fastslå at

$$r(a_{m-1/2} + a_{m+1/2}) \le r(\alpha + \alpha) \le 1,$$

så hvert intervall I_m er definitivt inneholdt i $[-1, 1]$.

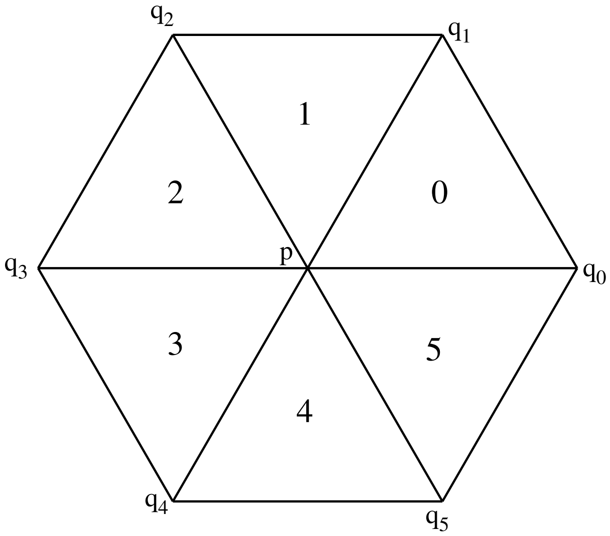
Oppgave 2 I denne oppgaven skal du studere ulike aspekter ved endelig elementmetode anvendt på på Poisson-problemet med homogene randkrav

$$-\Delta u = f \quad (x, y) \in \Omega, \qquad u = 0 \quad (x, y) \in \partial\Omega. \tag{1}$$

Anta at Ω kan deles opp i likeformede trekanter der alle sidekanter har lengde h. Et utsnitt av trekantnettet er gitt på figuren, der vi antar at alle $q_0 \ldots, q_5$ er indre noder. De 6 trekantene T_j er på figuren merket med tallet j. Vi introduserer approksimasjonsrom $S_h \subset S$ som underrommet av S bestående av funksjoner som er lineære på hver trekant. Som basis for S_h bruker vi pyramidefunksjoner $\{\phi_p(x,y) : p \text{ indre node i } \Omega\}$. For utsnittet på figuren lager vi et lokalt koordinatsystem ved å sette

$$\xi = \frac{x - x_p}{h}, \qquad \eta = \frac{y - y_p}{h},$$

følgelig får hjørnene i sekskanten koordinater $(\pm 1, 0)$ og $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3})$. Vi definerer vektoren $\mathbf{z} = (\xi, \eta)$.



a) Formfunksjonene ψ_p^j, $j = 0, \ldots, 5$, er basisfunksjonen ϕ_p restriktert til trekant T_j (se figuren). Bestem $\psi_p^0(\mathbf{z})$, $\psi_{q_0}^0(\mathbf{z})$ og $\psi_{q_1}^0(\mathbf{z})$.

Svar: Punktene i trekant T_0 har hjørner $p(0,0), q_0(1,0), q_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$. Vi lager lineære funksjoner av ξ og η og får

$$\psi_p^0(\xi,\eta) = 1 - \xi - \frac{1}{\sqrt{3}}\eta, \qquad \psi_{q_0}^0(\xi,\eta) = \xi - \frac{1}{\sqrt{3}}\eta, \qquad \psi_{q_1}^0(\xi,\eta) = \frac{2}{\sqrt{3}}\eta.$$

b) Argumentér for at et fins en 2×2-matrise Q slik at

$$\begin{aligned}
\psi_p^{j+1}(\mathbf{z}) &= \psi_p^j(Q\mathbf{z}),\\
\psi_{q_{j+1}}^{j+1}(\mathbf{z}) &= \psi_{q_j}^j(Q\mathbf{z}),\\
\psi_{q_{j+1}}^{j}(\mathbf{z}) &= \psi_{q_j}^{j-1}(Q\mathbf{z}),
\end{aligned}$$

der vi pr definisjon setter $\psi_p^6(\mathbf{z}) := \psi_p^0(\mathbf{z})$, og $\psi_{q_6}^j := \psi_{q_0}^j$. Bestem Q og verifiser at den er ortogonal ($Q^TQ = I$) med determinant lik 1.

Svar: Vi ser at dersom trekanten T_{j+1} roteres 60 grader ($\pi/3$) med klokka omkring det fikserte punktet p så transformeres den til trekant T_j, hjørnene i T_{j+1} avbildes på hjørnene i T_j. Punktet p er invariant under transformasjonen, mens q_{j+1} avbildes til q_j (modulo 6). En slik rotasjon er en lineær transformasjon så hvis $\psi^j(\mathbf{z})$ er en lineær funksjon på T_j vil $\psi^j(Q\mathbf{z})$ være en lineær funksjon på T_{j+1}. Q er matrisen som roterer punkter 60 grader med klokka omkring origo, dvs

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Q er opplagt ortogonal med determinant 1.

c) Bruk dette til å verifisere at

$$\int_{T_j} \left|\nabla\psi_p^j\right|^2 \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = \int_{T_0} \left|\nabla\psi_p^0\right|^2 \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$$
$$\int_{T_j} \nabla\psi_p^j \cdot \nabla\psi_{q_j}^j \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = \int_{T_0} \nabla\psi_p^0 \cdot \nabla\psi_{q_0}^0 \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$$
$$\int_{T_j} \nabla\psi_p^j \cdot \nabla\psi_{q_{j+1}}^j \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = \int_{T_0} \nabla\psi_p^0 \cdot \nabla\psi_{q_1}^0 \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$$

for $0 \le j \le 5$, og bestem de tre integralene.

Svar: Ved å bruke relasjonene i forrige punkt gjentatte ganger får en

$$\psi_p^j(\mathbf{z}) = \psi_p^0(Q^j\mathbf{z}), \quad \psi_{q_j}^j(\mathbf{z}) = \psi_{q_0}^0(Q^j\mathbf{z}), \quad \psi_{q_{j+1}}^j(\mathbf{z}) = \psi_{q_1}^0(Q^j\mathbf{z}).$$

I alle tre integraler gjør vi variabelskiftet $\mathbf{z}' = Q^j\mathbf{z}$, slik at integrasjonsområdet transformeres fra T_j til T_0. Dessuten må vi huske å multiplisere med Jacobianen (dvs determinanten til Jacobimatrisen) til transformasjonen. I vårt tilfelle er denne Jacobianen gitt som Q^j og siden $\det(Q^j) = \det(Q)^j = 1$ så får vi ingen ekstra faktor og første del av oppgaven følger. For å beregne integralene må vi ta gradienter fra svaret i **a)**.

$$\nabla\psi_p^0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad \nabla\psi_{q_0}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad \nabla\psi_{q_1}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$

Arealet av hver trekant er (i (ξ,η)-koordinater) er $A = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ og dermed blir de tre integralene henholdsvis

$$\frac{4}{3}A, \qquad -\frac{2}{3}A, \qquad -\frac{2}{3}A$$

d) Variasjonsformuleringen av (1) gir en bilineær form $a(u,v)$, $u,v \in S$. Bestem $a(\phi_p,\phi_p)$ og $a(\phi_p,\phi_{q_j})$, $0 \le j \le 5$, der ϕ_p, ϕ_{q_j} er pyramidefunksjonene sentrert hhv i p og q_j.

Svar: Det meste av jobben er nå gjort i de tidligere punktene, vi finner

$$a(\phi_p,\phi_p) = \sum_{j=0}^{5} \int_{T_j} |\nabla\psi_p^j|^2 \,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = 6\int_{T_0} |\nabla\psi_p^0|^2 \,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = 8A$$

og

$$\begin{aligned} a(\phi_p,\phi_{q_{j+1}}) &= \int_{T_j} \nabla\psi_p^j \cdot \nabla\psi_{q_{j+1}}^j \,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta + \int_{T_{j+1}} \nabla\psi_p^{j+1} \cdot \nabla\psi_{q_{j+1}}^{j+1} \,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \\ &= \int_{T_0} \nabla\psi_p^0 \cdot \nabla\psi_{q_1}^0 \,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta + \int_{T_0} \nabla\psi_p^0 \cdot \nabla\psi_{q_0}^0 \,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = -\frac{4}{3}A \end{aligned}$$

Oppgave 3 Vi ser på det hyperbolske problemet

$$u_t + au_x = bu.$$

Lax-Wendroff's metode for denne ligningen er

$$U_m^{n+1} = (1 + bk + \frac{1}{2}(bk)^2)\, U_m^n - \frac{ap}{2}(1 + bk)\,(U_{m+1}^n - U_{m-1}^n) + \frac{(ap)^2}{2}\,\delta_x^2 U_m^n$$

der $p = k/h$ og k og h er skrittlengden i henholdsvis tid og rom.

a) Vis hvordan denne metoden kan utledes, for eksempel ved å benytte at $\partial_t^2 u = a^2\partial_x^2 u - 2ab\partial_x u + b^2 u$.

Svar: Vi gjør dette på standardmåten og får da med oss også svaret på neste delspørsmål. La $\zeta = bk$.

$$\begin{aligned}
u_m^{n+1} &= u_m^n + k\,\partial_t u_m^n + \frac{1}{2}k^2\partial_t^2 u_m^n + \frac{1}{6}k^3\partial_t^3 u_m^n + \cdots \\
&= u_m^n + k(-a\partial_x + b)u_m^n + \frac{1}{2}k^2(a^2\partial_x^2 - 2ab\partial_x + b^2)u_m^n + \frac{1}{6}k^3\partial_t^3 u_m^n + \cdots \\
&= (1 + \zeta + \zeta^2/2)u_m^n - ak(1+\zeta)\partial_x u_m^n + \frac{1}{2}(ak)^2\partial_x^2 u_m^n + \frac{1}{6}k^3\partial_t^3 u_m^n + \cdots
\end{aligned}$$

Vi setter nå inn $\partial_x u_m^n = \frac{1}{2h}(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) - \frac{1}{6}h^2\partial_x^3 u_m^n - \cdots$, samt $\partial_x^2 u_m^n = \frac{1}{h^2}\delta_x^2 u_m^n - \frac{1}{12}h^2\partial_x^4 u_m^n - \cdots$, og får

$$u_m^{n+1} = (1 + bk + \frac{1}{2}(bk)^2)\, u_m^n - \frac{ap}{2}(1 + bk)\,(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + \frac{(ap)^2}{2}\,\delta_x^2 u_m^n + \tau_m^n$$

der τ_m^n er skrevet opp i neste punkt.

b) Utled et uttrykk for den lokale avbruddsfeilen τ_m^n, idet du tar hensyn til at en kan ha $a = 0$ eller $b = 0$. Som et minimum bør du ha et uttrykk av formen $\tau_m^n = \mathcal{O}(\cdots)$, men angi gjerne de prinsipale leddene i utviklingen.

Svar: Fra forrige punkt finner vi de prinsipale leddene i avbruddsfeilen

$$\tau_m^n = \frac{1}{6}k^3\partial_t^3 u_m^n + \frac{1}{6}a(1+bk)kh^2\partial_x^3 u_m^n - \frac{1}{24}a^2k^2h^2\partial_x^4 u + \cdots$$

så vi konkluderer med at avbruddsfeilen er $\mathcal{O}(k^3 + kh^2)$ generelt og $\mathcal{O}(k^3$ når $a = 0$.

c) La $\zeta = bk$, $r = ap$. Vis at metoden ovenfor er von Neumann stabil for alle ζ, r slik at

$$(1 + \zeta + \zeta^2/2)^2 + 4qr^2(\zeta + \zeta^2/2) + 4r^2q^2(r^2 - (1+\zeta)^2) \le 1, \quad \text{for alle } 0 \le q \le 1.$$

Hint. Parameteren q framkommer som $q = \sin^2\frac{\beta h}{2}$ med vanlig notasjon for von Neumann stabilitet.

Svar: Vi setter inn $U_m^n = \xi^n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta h}$ i skjemaet og får

$$\xi = \phi_\zeta - \mathrm{i}r(1+\zeta)\sin\beta h + r^2(\cos\beta h - 1), \qquad \phi_\zeta = 1 + \zeta + \frac{1}{2}\zeta^2$$

Vi innfører nå $q = \sin^2 \frac{\beta h}{2}$ og bruker at en dermed har $\cos\beta h = 1 - 2q$, og vi får

$$|\xi|^2 = (\phi_\zeta - 2r^2 q)^2 + r^2(1+\zeta)^2(1-(1-2q)^2) = \phi_\zeta^2 + 4qr^2(\frac{1}{2}\zeta^2 + \zeta) + 4r^2q^2(r^2 - (1+\zeta)^2)$$

og svaret følger ved å kreve $|\xi|^2 \le 1$.

d) Vis at nødvendige betingelser for von Neumann stabilitet blir

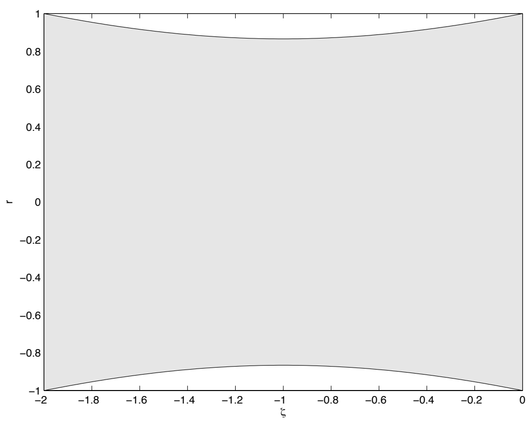
$$-2 \le \zeta \le 0, \qquad r^2 \le 1 + \frac{1}{2}\zeta + \frac{1}{4}\zeta^2$$

Svar: Her er poenget bare at kriteriet ovenfor må gjelde for alle βh og dermed for alle $0 \le q \le 1$. Spesielt vil vi sjekke endepunktene $q = 0$ og $q = 1$. For $q = 0$ får vi kun $-1 \le \phi_\zeta \le 1$.Vi kan skrive $\phi_\zeta = \frac{1}{2}(1 + (\zeta+1)^2)$ så åpenbart holder venstre ulikhet. For høyre ulikhet får vi $\frac{1}{2}\zeta(\zeta+2) \le 0$ som gir første kriterium fra oppgaven. Setter vi $q = 1$ kan vi trekke sammen ledd og finner at ulikheten som må oppfylles er rett og slett

$$(\phi_\zeta - 2r^2)^2 \le 1 \quad \Rightarrow \quad (r^2 - \frac{\phi_\zeta - 1}{2})(r^2 - \frac{\phi_\zeta + 1}{2}) \le 0.$$

Den første ulikheten $-2 \le \zeta \le 0$ sikrer at første faktor $(r^2 - \frac{\phi_\zeta - 1}{2}) \ge 0$ og dermed blir kravet

$$(r^2 - \frac{\phi_\zeta + 1}{2}) \le 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 \le \frac{\phi_\zeta + 1}{2} = 1 + \frac{1}{2}\zeta + \frac{1}{4}\zeta^2$$



Figur 1: **Stabilitetsområde i ζ-r-planet**