



Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Bård Skaflestad (92426867)

EKSAMEN I NUMERISK LØSNING AV DIFFERENSIALLIGNINGER

MED DIFFERANSEMETODER (TMA4212)

Fredag 9. juni 2006

Tid: 09:00–13:00, Sensur: 30.06.2006

Hjelpemidler: Kategori B, alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt enkel kalkulator tillatt. Typegodkjent lommekalkulator med tomt minne.

Oppgave 1 Vi skal i denne oppgaven se på adveksjon-diffusjonsligningen formulert som et start/randverdiproblem

$$\begin{aligned}u_t + au_x &= \nu u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < 1, \\u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq 1, \\u(0, t) &= g_0(t), \quad u(1, t) = g_1(t), & t \geq 0.\end{aligned}\tag{1}$$

- a) Vi innfører et gitter med noder (x_m, t_n) der $x_m = mh$, $0 \leq m \leq M$ og $t_n = nk$, $0 \leq n \leq N$ der skritt lengdene er gitt som $h = 1/M$ og $k = T/N$. La $r = k/h^2$ og $q = ak/h$. Til $u_m^n = u(x_m, t_n)$ benyttes U_m^n som approksimasjon. Følgende eksplisitte skjema foreslås for (1)

$$U_m^{n+1} = \left(\nu r + \frac{\alpha + 1}{2} q\right) U_{m-1}^n + (1 - 2\nu r - \alpha q) U_m^n + \left(\nu r + \frac{\alpha - 1}{2} q\right) U_{m+1}^n, \tag{2}$$

hvor α er en parameter som vi kan velge. Finn et uttrykk for hovedleddene i den lokale avbruddsfeilen uttrykt ved α , og kommenter om det fins et spesifikt valg av α gir en bedre konvergensorden.

Svar: Flytt alle ledd over på venstre side i differensformelen, sett inn eksakt løsning u og rekkeutvikle omkring (x_m, t_n) . Hvis $\alpha \neq 0$ får vi

$$\tau_m^n = \frac{1}{2} (k^2 \partial_t^2 - \alpha h k a \partial_x^2) u_m^n + \dots$$

men spesielt, hvis $\alpha = 0$ fås istedet

$$\tau_m^n = \frac{1}{2} k^2 \partial_t^2 u_m^n + kh^2 \left(\frac{1}{6} a \partial_x^3 - \frac{1}{12} \nu \partial_x^4 \right) u_m^n + \dots$$

- b) La oss anta at vi setter $\alpha = 0$ i (2), men så erstatter diffusjonskoeffisienten ν i (1) med $\bar{\nu} = \nu + \frac{1}{2} \alpha a h$. Skriv ned den resulterende differensformelen, og kommenter svaret.

Svar: En finner at ved å sette $\alpha = 0$ og modifisere diffusjonskoeffisienten tilsvarende, får en akkurat den samme formelen (2) tilbake. Så i den opprinnelige formelen vil positive verdier av $a\alpha$ være ekvivalent med å legge til diffusjon i ligningen, dette har gjerne en stabiliserende effekt.

- c) Sett $\alpha = 0$ i (2) og undersøk metodens stabilitet på tidsintervall $[0, T]$ med matrisemetoden.

Hint: Matrisen A som skal undersøkes er diagonaliserbar slik at $A = T\Lambda T^{-1}$ der

$$\|T\|_2 \cdot \|T^{-1}\|_2 \leq e^{\frac{|a|}{2\nu}}, \quad \text{for alle } h, k.$$

Svar: Dette er en morsom liten "nøtt" og vi skal gi et nokså utfyllende svar her. Vi ser først fra formelen (2) at en kan formulere metoden på formen

$$U^{n+1} = AU^n + g^n, \quad A \in \mathbf{R}^{(M-1) \times (M-1)}, \quad g^n \in \mathbf{R}^{M-1}$$

og $U^n = (U_1^n, \dots, U_{M-1}^n)^T$. Matrisen A er tridiagonal med

$$A_{m,m} = 1 - 2\nu r - \alpha q, \quad A_{m,m-1} = \nu r + \frac{\alpha + 1}{2} q, \quad A_{m,m+1} = \nu r + \frac{\alpha - 1}{2} q.$$

Vi vet fra kurset at stabilitet er ekvivalent med at det fins en konstant C slik at $\|A^n\| \leq C$, $1 \leq n \leq T/k$, når $h, k \rightarrow 0$. Oppgaven antyder at $\|\cdot\|_2$ skal brukes, så vi antar dette i det videre. Her er ikke A normal, så en kan ikke uten videre bruke spektralradien til å sjekke dette kriteriet. Men fra hintet finner vi

$$A^n = (T\Lambda T^{-1})^n = T\Lambda^n T^{-1}.$$

Igjen fra hintet finner vi

$$\|A^n\|_2 \leq \|T\|_2 \|T^{-1}\|_2 \|\Lambda^n\|_2 \leq e^{\frac{|a|}{2\nu}} \rho(A)^n$$

fordi $\rho(\Lambda) = \|\Lambda\|_2$ når Λ er diagonal, og A og Λ er similære så de har samme egenverdier. Dermed kan vi likevel bruke kriteriet $\rho(A) \leq 1 + \mu k$. Egenverdiene til A kan finnes ved formelen bakerst i settet. Merk at kvadratrotten bli kompleks hvis $\ell \cdot u < 0$, i vårt tilfelle vil det svare til at $\frac{|a|h}{2\nu} > 1$ eller at $P/2 > 1$ der

P er det såkalte *Peclet*-tallet. Store Peclet-tall betyr at problemet er konveksjons-dominert og dette er et velkjent problem fra strømningsberegninger, det skaper ofte numeriske vanskeligheter, f.eks. i forbindelse med grensesjikt. Når vi ser på stabilitet er vi interessert i prosessen når skritt lengdene h og k går mot null, da blir Peclet-tallet $P = \frac{|a|h}{\nu}$ lite, så det er egentlig nok å sjekke tilfellet med reelle egenverdier. For små Peclet-tall ($P/2 \leq 1$) fås fra formelen

$$\lambda_s = 1 - \beta + \beta\theta c_s, \quad \beta = 2\nu r, \quad \theta = \sqrt{1 - (P/2)^2}, \quad c_s = \cos \frac{\pi s}{M}, \quad s = 1, \dots, M-1.$$

Vi antar i det videre at $r > 0$. Nå er altså egenverdiene reelle og en kan sjekke at $-1 - \mu k \leq \lambda_s \leq 1 + \mu k$. Den siste av disse ulikhetene er ubetinget oppfylt. Den første krever at

$$\beta(1 - \theta c_s) \leq 2 + \mu k$$

Det er mest kritisk når c_s er nær -1 , vi får dermed

$$\beta(1 + \theta) \leq 2 + \mu k.$$

Herfra følger nødvendig krav $\beta = 2\nu r \leq 2$. Vi finner videre

$$\beta^2 \theta^2 \leq (2 - \beta)^2 + \mu k$$

Om vi setter inn, finner vi $\beta^2 \theta^2 = \beta \frac{ka^2}{2\nu} \leq \frac{a^2}{\nu} \cdot k$. Så kravet til stabilitet blir til slutt $\beta = 2\nu r \leq 1$ som er det samme vi ville fått hvis $a = 0$.

La oss nå sjekke tilfellet med store Peclet-tall, dvs $P/2 > 1$. Merk at for konvergensens sin del er ikke dette tilfellet aktuelt fordi vi da ser på hva som skjer når h (og k) går mot null. Da blir Peclet-tallet lite. Likevel er det interessant å studere stabilitet ved store Peclet-tall. Nå blir egenverdiene

$$\lambda_s = 1 - \beta + i\beta\eta c_s, \quad \eta = \sqrt{(P/2)^2 - 1}$$

Vi finner

$$|\lambda_s|^2 = (1 - \beta)^2 + \beta^2 \eta^2 c_s^2 \leq (1 + \mu k)^2$$

og etter litt rydding og innsetting gir dette kravet

$$\beta^2 - \varepsilon^2(2\beta - \mu k) \leq 0, \quad \varepsilon = 2/P$$

Uttrykt ved Peclet-tallet fås til slutt kravet

$$\nu r \leq \frac{1}{P} + \sqrt{(1/P)^2 + \mu k}$$

(μ er ikke den samme konstanten i hver mellomregning). Vi ser dermed hva slags problemer som oppstår ved store Peclet-tall. Merk forøvrig at eksponenten i hintet er $|a|/(2\nu) = P/(2h)$ som blir stor ved store Peclet-tall. Dette innebærer at selv om stabilitetskravet er oppfylt, kan feilen vokse seg veldig stor i initialfasen, det vil si at liten lokale feil kan gi veldig stor globalfeil (skjemaet er likevel konvergent når stabilitetskravet $2\nu r \leq 1$ er oppfylt).

Opgave 2 En funksjon $u(x, y)$ tilfredsstillter den elliptiske differensialligningen

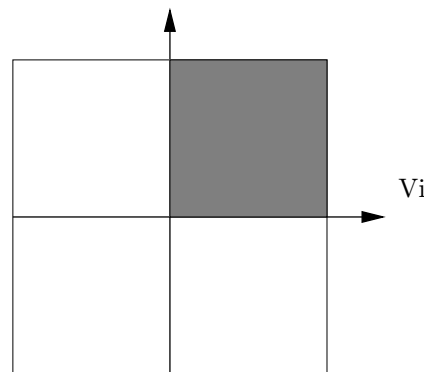
$$u_{xx} + 3u_{yy} = -16$$

på et kvadrat begrenset av linjene $x = \pm 1$ og $y = \pm 1$. Randbetingelsene er $u = 0$ når $x = 1$ og $\frac{\partial u}{\partial y} = -1$ når $y = 1$. Dessuten er $u(x, y)$ symmetrisk både om x -aksen og om y -aksen. Vi bruker en fempunktsformel som differensapproximasjon, og et ekvidistant gitter med skritt lengder $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{4}$.

- a) Vis hvordan en kan approksimere løsningen av dette problemet ved å løse ligningssystemet $AU = b$ der A er en 20×20 -matrise av formen

$$A = \begin{bmatrix} B & 6I & & & \\ 3I & B & 3I & & \\ & 3I & B & 3I & \\ & & 3I & B & 3I \\ & & & 6I & B \end{bmatrix}$$

Svar: Stikkordet her er *symmetri*. Vi behøver kun å forholde oss til det skraverte området på figuren. Siden $u(x, y) = u(-x, y)$ kan vi bruke randbetingelsen $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0$ for $0 \leq y \leq 1$. Tilsvarende fordi $u(x, y) = u(x, -y)$, har vi $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0$ for $0 \leq x \leq 1$. Vi bruker dette sammen med de oppgitte betingelsene $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = -1$ for $0 \leq x \leq 1$ og $u(1, y) = 0$ for $0 \leq y \leq 1$. Vi har dermed Dirichletbetingelse på den høyre vertikale randen av det skraverte området, og Neumannbetingelser på de tre andre rendene. Vi husker at for Neumannbetingelser blir randnodene ukjente, mens de er kjente for Dirichletbetingelser. Vi får da ukjente i nodene $(x_m, t_n) = (m/4, n/4)$, $0 \leq m \leq 3$ og $0 \leq n \leq 4$ altså $4 \times 5 = 20$ ukjente. Dette forklarer dimensjonen på matrisen. Dessuten har matrisen 5 blokker i hver linje og kolonne, dermed må hver blokk være 4×4 . Siden det er 4 ukjente i hver horisontale gitterlinje, kan vi konkludere med at nodene nummereres linje for linje.



har $\Delta x^2 = \Delta y^2 = \frac{1}{16}$ og får med fempunktsformelen

$$U_{m-1,n} + U_{m+1,n} + 3U_{m,n-1} + 3U_{m,n+1} - 8U_{m,n} = -1$$

På de tre Neumann-rendene bruker vi en fiktiv gitterlinje, og får for eksempel

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}(0, n/4) \approx \frac{u_{1,n} - u_{-1,n}}{1/4} \Rightarrow U_{-1,n} = U_{1,n}$$

Man gjør tilsvarende for de to andre Neumann-rendene, og resultatet blir at når man anvender fempunktsformelen på randnoder erstattes $U_{-1,n} \rightarrow U_{1,n}$, $U_{m,-1} \rightarrow U_{m,1}$, $U_{m,5} \rightarrow U_{m,3}$. Strukturen på ligningssystemet følger nå enkelt.

- b) Finn matrisen B .

Svar:

$$B = \begin{bmatrix} -8 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

Oppgave 3 Vi ser på den hyperbolske differensialligningen

$$u_t + 2t u_x = 0. \quad (3)$$

a) Vis at karakteristikken gjennom punktet (X, T) , $T > 0$ er gitt ved ligningen

$$t = \sqrt{x - X + T^2}, \quad t > 0$$

Svar: Karakteristikkkligningen er gitt ved

$$\frac{dx}{dt} = a(x, t) = 2t \quad \Rightarrow \quad x - X = t^2 - T^2$$

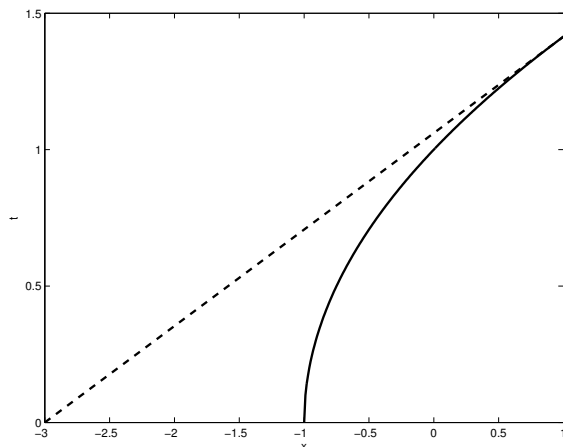
og en får $t = \sqrt{x - X + T^2}$

b) Bruk dette til å bestemme CFL-kriteriet for et eksplisitt skjema av typen

$$U_m^{n+1} = a_{-1} U_{m-1}^n + a_0 U_m^n + a_1 U_{m+1}^n$$

anvendt på (3).

Svar: CFL-kriteriet sier at karakteristikene aldri må forlate avhengighetsområdet for punktet (X, T) .



Figuren viser en karakteristik som heltrukken linje. Den stiplede linja avgrensner venstre halvdel av det minste mulige avhengighetsområdet for punktet $(X, T) = (1, \sqrt{2})$. Vi ser at det minste mulige avhengighetsområdet fås når den stiplede linja tangerer karakteristikken i punktet (X, T) . Tangenten til karakteristikken i (X, T) har stigningstall

$$\left. \frac{dt}{dx} \right|_{x=X} = \frac{1}{2\sqrt{x - X + T^2}} \Big|_{x=X} = \frac{1}{2T}$$

Så kravet blir

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{2T}$$

c) Undersøk dissipasjonsegenskapene til skjemaet

$$U_m^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{m+1}^n + U_{m-1}^n) - \frac{ak}{2h}(U_{m+1}^n - U_{m-1}^n)$$

for ligningen $u_t + au_x = 0$.

Svar: Vi finner fra innsetting av $U_m^n = \xi^n e^{i\beta x_m}$ i formelen at

$$\xi = \cos \beta h - i r \sin \beta h, \quad r = ap$$

som innebærer at

$$|\xi|^2 = 1 - (1 - r^2) \sin^2 \beta h$$

Dermed er $|r| \leq 1$ stabilitetskravet (von Neumann). Dissipasjon kan da evt oppnås når $r < 1$, en må i såfall ha konstanter $\sigma > 0, k_0 > 0$ og heltall s slik at

$$|\xi| \leq 1 - \sigma(\beta h)^{2s}, \quad k < k_0, \quad |\beta h| \leq \pi$$

Men dette er ikke mulig, for ved innsetting av $\beta h = \pi$ gir $|\xi| = 1$, så ulikheten kan ikke holde. Skjemaet er ikke dissipativt.

Oppgitt formel. La $A = \text{trid}(\ell, d, u)$ det vil si en tridiagonal $n \times n$ -matrise med d på diagonalen ℓ på subdiagonalen, og u på superdiagonalen. Da er egenverdiene gitt som

$$\lambda_s = d + 2\sqrt{\ell u} \cos \frac{\pi s}{n+1}, \quad s = 1, \dots, n.$$