Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG — EKSAMEN I TMA4210

Fredag 10. juni 2005, 3 timer.

Hjelpemidler:
Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Oppgave 1

a) Vi skriver om skjemaet til

$$
\begin{aligned}
-(1-\theta)\mu U_{\ell-1}^{n+1} + (1+2(1-\theta)\mu)U_\ell^{n+1} - (1-\theta)\mu U_{\ell+1}^{n+1} &= \\
\theta\mu U_{\ell-1}^n + (1-2\theta\mu)U_\ell^n + \theta\mu U_{\ell+1}^n
\end{aligned}
$$

Når $U^n = [U_1^n, \ldots, U_m^n]^T$ ser vi at

$$
M = \begin{pmatrix}
1+2(1-\theta)\mu & -(1-\theta)\mu & & & \\
-(1-\theta)\mu & 1+2(1-\theta)\mu & -(1-\theta)\mu & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & -(1-\theta)\mu & 1+2(1-\theta)\mu & -(1-\theta)\mu \\
 & & & -(1-\theta)\mu & 1+2(1-\theta)\mu
\end{pmatrix}
$$

$$
A = \begin{pmatrix}
1-2\theta\mu & \theta\mu & & & \\
\theta\mu & 1-2\theta\mu & \theta\mu & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \theta\mu & 1-2\theta\mu & \theta\mu \\
 & & & \theta\mu & 1-2\theta\mu
\end{pmatrix}
$$

Randdata gir

$$F = \begin{pmatrix} -(1-\theta)\mu\phi_0(t_{n+1}) + \theta\mu\phi_0(t_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -(1-\theta)\mu\phi_1(t_{n+1}) + \theta\mu\phi_1(t_n) \end{pmatrix}$$

der F kommer fra randdata.

b) Egenverdiene til M er via formel gitt som

$$1 + 2(1-\theta)\mu\left(1 + \cos\frac{\pi s}{m+1}\right)$$

for $s = 1, \ldots, m$ som aldri blir lik null ($\mu > 0$ og $0 \leq \theta \leq 1$). Dermed må M være regulær/ikke-singulær.

c) Et estimat på trunkeringsfeilen finner vi å ved å sette inn eksaktløsningen i formelen for trunkeringsfeil gitt i oppgaven, og taylorutvikle den.

En taylorutvikling av $u(x,t)$ i punktet (x_ℓ, t_{n+1}) gir følgende uttrykk. For å spare plass, så gjelder det under at u er evaluert i (x_ℓ, t_{n+1}) når det ikke står noe annet.

$$\begin{aligned}
u(x_\ell, t_n) &= u - \Delta t\, u_t + \mathcal{O}\left(\Delta t\right)^2 \\
u(x_{\ell-1}, t_{n+1}) &= u - \Delta x\, u_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!}u_{xx} - \frac{(\Delta x)^3}{3!}u_{xxx} + \mathcal{O}(\Delta x)^4 \\
u(x_{\ell+1}, t_{n+1}) &= u + \Delta x\, u_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!}u_{xx} + \frac{(\Delta x)^3}{3!}u_{xxx} + \mathcal{O}(\Delta x)^4 \\
u(x_{\ell-1}, t_n) &= u - \Delta t u_t - \Delta x u_x + \Delta x \Delta t u_{xt} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}u_{xx} - \frac{(\Delta x)^3}{3!}u_{xxx} + \mathcal{O}(\Delta x)^4 \\
u(x_{\ell+1}, t_n) &= u - \Delta t u_t + \Delta x u_x - \Delta x \Delta t u_{xt} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}u_{xx} + \frac{(\Delta x)^3}{3!}u_{xxx} + \mathcal{O}(\Delta x)^4
\end{aligned}$$

som vi putter inn i trunkeringsfeiluttrykket

$$\begin{aligned}
|T_\ell^{n+1}| &= \big|u - u(x_\ell, t_n) - (1-\theta)\mu\big[u(x_{\ell-1}, t_{n+1}) - 2u(x_l, t_{n+1}) + u(x_{\ell+1}, t_{n+1})\big] \\
&\qquad \theta\mu\big[u(x_{\ell-1}, t_n) - 2u(x_l, t_n) + u(x_{\ell+1}, t_n)\big]\big| \\
&= \big|\Delta t u_t - (1-\theta)\mu(\Delta x)^2 u_{xx} - \theta\mu(\Delta x)^2 u_{xx} + \mathcal{O}(\Delta x)^4\big|
\end{aligned}$$

hvor mange ledd har blitt strøket mot hverandre. Vi bruker så $u_t(x_\ell, t_{n+1}) - u_{xx}(x_\ell, t_{n+1}) = 0$ (som gjelder fordi u er eksaktløsning til differensialligningen) og $\mu = \Delta t/(\Delta x)^2$. Da står vi igjen med $\mathcal{O}(\Delta x)^4$ som betyr at det finnes en konstant C slik at $|T_\ell^{n+1}| \leq C(\Delta x)^4$ som er det vi skulle vise.

d) La t^* være en vilkårlig valgt konstant. Feilen definerer vi som

$$e_\ell^n = U_\ell^n - u(x_\ell, t_n), \quad \ell = 1, \dots, m, \quad n = 0, \dots, N$$

der $N = \lfloor t^*/\Delta t \rfloor$. Konvergens er definert som

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\max_n \left(\max_\ell |e_\ell^n| \right) \right] = 0$$

når μ holdes konstant (det betyr at vi har kontroll på at også Δt går mot null når Δx gjør det, og omvendt).

Ved hvert tidspunkt definerer vi også $\eta^n = \max\limits_\ell |e_\ell^n|$ som er den største feilen vi gjør på en node ved tidspunkt t_n.

Trekker vi numerisk løsning gitt ved skjemaet fra eksakt løsning, får vi

$$e_\ell^{n+1} = e_\ell^n + \mu \left[(1-\theta) \left(e_{\ell-1}^{n+1} - 2e_{\ell-1}^{n+1} + e_{\ell+1}^{n+1} \right) + \theta \left(e_{\ell-1}^n - 2e_\ell^n + e_{\ell+1}^n \right) \right] + T_\ell^{n+1}$$

Vi rydder litt og får:

$$(1 + 2\mu(1-\theta))e_\ell^{n+1} = \mu(1-\theta)(e_{\ell-1}^{n+1} + e_{\ell+1}^{n+1}) + \theta(e_{\ell-1}^n + e_{\ell+1}^n) + (1 - 2\theta\mu)e_\ell^n + T_\ell^{n+1}$$

La nå $\varepsilon_\ell^n = |e_\ell^n|$. Fra **a)** har vi at $T_\ell^{n+1} \sim \mathcal{O}(\Delta x)^4$. Tolkingen av $\mathcal{O}$-notasjonen gir at vi nå kan putte inn en ulikhet og konstant C (som er avhengig av høyere deriverte av u). Ved å ta absoluttverdi av begge sider og bruke trekantulikheten får vi

$$(1 + 2\mu(1-\theta))\varepsilon_\ell^{n+1} \leq \mu(1-\theta)(\varepsilon_{\ell-1}^{n+1} + \varepsilon_{\ell+1}^{n+1}) + \theta(\varepsilon_{\ell-1}^n + \varepsilon_{\ell+1}^n) + (1 - 2\theta\mu)\varepsilon_\ell^n + C(\Delta x)^4$$

hvor vi har brukt at $1 - 2\theta\mu \geq 0$ som tilsvarer at $\mu \leq \frac{1}{2\theta}$. (Dette er naturlig siden θ-metoden inkluderer forlengs Euler ($\theta = 1$), og for den gjelder at $\mu \leq 1/2$.)

Vi kan nå ta max over ℓ som gir ($\eta^n = \max_\ell |e_\ell^n|$)

$$(1 + 2\mu(1-\theta))\eta^{n+1} \leq 2\mu(1-\theta)\eta^{n+1} + 2\theta\eta^n + (1 - 2\theta\mu)\eta^n + C(\Delta x)^4$$

som umiddelbart gir at

$$\eta^{n+1} \leq \eta^n + C(\Delta x)^4$$

Siden η^0 er null (initialdata er eksakt), gir induksjon at

$$\eta^n \leq nC(\Delta x)^4$$

der $n \leq N = \lfloor t^*/\Delta t \rfloor = \lfloor t^*/(\mu \Delta x)^2 \rfloor$. Dermed blir $\eta^n \sim \mathcal{O}(\Delta x)^2$ som betyr at vi har konvergens.