Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Brynjulf Owren (93021641)

EKSAMEN I NUMERISK LØSNING AV PARTIELLE DIFFERENSIALLIGNINGER MED DIFFERANSEMETODER (TMA4210)

Mandag 24. mai 2004
Tid: 09:00–12:00, Sensur: 14.06.2004

Hjelpemidler: Kategori B, Typegodkjent kalkulator med tomt minne, HP30S.
Iserles A., *A first Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*, Cambridge University Press.
Owren B., *TMA4210 Numerisk løsning av partielle differensialligninger med endelig differensemetoder*, kompendium, 2004.
Rottmanns matematiske formelsamling, norsk utgave, Bracan forlag.

Oppgave 1 Vi ser på diffusjonsligningen

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad 0 \le x \le 1,\ t \ge 0, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) &= g_0(t), \qquad u(1,t) = g_1(t), \quad t \ge 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Vi innfører et rektangulært gitter med punkter (x_m, t_n) der $x_m = m\,h,\ 0 \le m \le M,\ h = 1/M$, $t_n = nk,\ n = 0, 1, \ldots$. Størrelsen U_m^n approksimerer $u_m^n = u(x_m, t_n)$. Vi lager en metode av følgende type

$$U_m^{n+\frac{1}{2}} = U_m^n + \frac{r}{2}\left(\Delta_x U_m^n - \nabla_x U_m^{n+\frac{1}{2}}\right), \tag{2}$$

$$U_m^{n+1} = U_m^{n+\frac{1}{2}} + \frac{r}{2}\left(\Delta_x U_m^{n+1} - \nabla_x U_m^{n+\frac{1}{2}}\right), \tag{3}$$

hvor $r = k/h^2$. Her er $U_m^{n+\frac{1}{2}}$ å oppfatte som en approksimasjon til $u(x_m, t_n + \frac{1}{2}k)$. Δ_x og ∇_x er henholdsvis forover- og bakoverdifferens i x-retning.

a) Beskriv en eksplisitt beregningsgang for skjemaet (2), (3). Bruk gjerne beregningsmolekyl som en del av forklaringen.

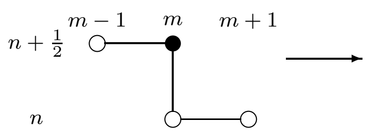
Svar: Vi ser at (2) og (3) kan skrives som henholdsvis

$$U_m^{n+\frac{1}{2}} - U_m^n = \rho(U_{m+1}^n - U_m^n - U_m^{n+\frac{1}{2}} + U_{m-1}^{n+\frac{1}{2}}) \tag{4}$$

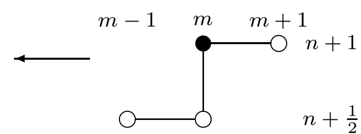
$$U_m^{n+1} - U_m^{n+\frac{1}{2}} = \rho(U_{m+1}^{n+1} - U_m^{n+1} - U_m^{n+\frac{1}{2}} + U_{m-1}^{n+\frac{1}{2}}) \tag{5}$$

der $\rho = r/2$. Beregningsmolekylene for disse blir:

(4)



(5)



For å kunne bruke grensebetingelsene rett, må (4) utføres fra venstre mot høyre, og (5) fra høyre mot venstre. Beregningsgangen blir da som følger:

$U_m^0 = f(x_m), \qquad m = 0, 1, \cdots, M$

for $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$

$$U_0^{n+\frac{1}{2}} = g_0(t_n + \tfrac{1}{2}k)$$

$$U_m^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\rho}{1+\rho}(U_{m-1}^{n+\frac{1}{2}} - U_m^n + U_{m+1}^n) + \frac{1}{1+\rho}U_m^n, \qquad m = 1, 2, \cdots, M-1$$

$$U_M^{n+\frac{1}{2}} = g_1(t_n + \tfrac{1}{2}k)$$

$$U_M^{n+1} = g_1(t_n + k)$$

$$U_m^{n+1} = \frac{\rho}{1+\rho}(U_{m-1}^{n+\frac{1}{2}} - U_m^{n+\frac{1}{2}} + U_{m+1}^{n+1}) + \frac{1}{1+\rho}U_m^{n+\frac{1}{2}}, \qquad m = M-1, \cdots, 1$$

$$U_0^{n+1} = g_0(t_n + k)$$

end for

hvor $M = 1/h$.

Det er mulig å skrive metoden ovenfor på formen

$$U_m^{n+1} = U_m^n + \frac{1}{4}(2r + r^2)\,\delta_x^2\,U_m^{n+1} + \frac{1}{4}(2r - r^2)\,\delta_x^2\,U_m^n. \tag{6}$$

b) Undersøk von Neumann's kriterium for stabilitet på denne metoden.

Svar: Vi setter $U_m^n = \xi^n e^{i\beta x_m}$ inn i (6), og bruker at

$$\delta_x^2(\xi^n e^{i\beta x_m}) = \xi^n e^{i\beta x_m}(-4\sin^2\frac{\beta h}{2})$$

Da finner vi (igjen med $\rho = r/2$) at:

$$\xi = \frac{1 - (\rho - \rho^2) 4 \sin^2 \dfrac{\beta h}{2}}{1 + (\rho + \rho^2) 4 \sin^2 \dfrac{\beta h}{2}}$$

Vi har $\rho > 0$ og $q := \sin^2 \frac{\beta h}{2} \geq 0$, dessuten er ξ reell for alle reelle ρ, β, h. Kravet

$$\xi \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 8\rho\, q \geq 0,$$

og

$$\xi \geq -1 \quad \Rightarrow \quad 2 + 8q\rho^2 \geq 0,$$

begge er oppfylt for alle $\rho \geq 0$ og $\beta \in \mathbb{R}$ så vi har ubetinget stabilitet iflg von Neumann's kriterium.

c) Det viser seg at dersom en lar $h \to 0$ og $k \to 0$ på en slik måte at $c = k/h$ er konstant, så vil den numeriske approksimasjonen U_m^n konvergere mot $\tilde{u}(x_m, t_n)$ for alle $x_m = mh$ og $t_n = nk$. Men funksjonen $\tilde{u}(x,t)$ er ikke eksakt løsning av diffusjonsligningen (1). Forklar hvorfor dette skjer, og finn en differensialligning som har $\tilde{u}(x,t)$ som eksakt løsning.

Svar: Metoden gir ikke konvergens mot den riktige løsningen. I følge Lax's ekvivalensteorem er metoden enten ustabil eller ikke konsistent. I oppgave **b.** har vi vist at metoden er stabil (von Neumann analyse er strengt tatt ikke tilstrekkelig til å vise stabilitet, men gir en rimelig indikasjon). Altså er det rimelig å anta at metoden ikke er konsistent.

Dette kan verifiseres ved å Taylorutvikle differanseoperatoren

$$\begin{aligned} \frac{\tau_m^n}{k} &= \mathcal{L}_{h,k} u(x_m, t_n) = \frac{u(x_m, t_n + k) - u(x_m, t_n)}{k} \\ &- \frac{1}{k} \left((\rho + \rho^2) \delta_x^2 u(x_m, t_n + k) + (\rho - \rho^2) \delta_x^2 u(x_m, t_n) \right) \end{aligned}$$

Det enkleste er å gjøre Taylorutviklingen rundt punktet $(x_m, t_n + h/2)$, og så benytte symmetriene så langt det går. Det gir:

$$\mathcal{L}_{h,k} u = u_t - u_{xx} - \frac{c^2}{4} u_{xxt} + \mathcal{O}(h^2 + k^2 + c^2 k)$$

slik at $\tilde{u}(x,t)$ er løsningen av ligningen

$$u_t = u_{xx} + \frac{c^2}{4} u_{xxt}$$

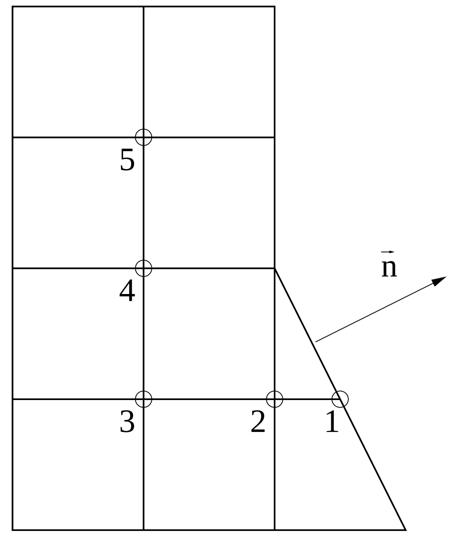
Oppgave 2 Vi ser her på Laplace's ligning på området Ω angitt på figuren.

$$\Delta u = 0, \qquad (x, y) \in \Omega,$$

med randverdier

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0, && 0 \le x \le 0.75, \\ u(x,1) &= 0, && 0 \le x \le 0.5, \\ u(0,y) &= \sin \pi y, && 0 \le y \le 1, \\ u(0.5,y) &= \sin \pi y, && 0.5 \le y \le 1, \\ \frac{\partial u}{\partial n}\left(\frac{3-\lambda}{4}, \frac{\lambda}{2}\right) &= \lambda, && 0 \le \lambda \le 1, \end{aligned}$$

der $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \vec{n}$. Som figuren antyder, brukes skrittlengde $h = 0.25$ både i x- og y-retning.



Finn en konsistent diskretisering av randkravet i noden merket 1, og sett opp et lineært ligningssystem for alle de 5 ukjente i figuren.

Svar:

Først finner vi at $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$. Avstanden $\ell_{21} = h/2$, og $\ell_{2Q} = \frac{h}{4}$. Dermed blir

$$d = \ell_{1Q} = h\sqrt{(1/2)^2 + (1/4)^2} = h\frac{\sqrt{5}}{4}$$

Siden $\lambda = \frac{1}{2}$ tilsvarer noden 1, ser vi nå fra figuren at et mulig valg er å sette

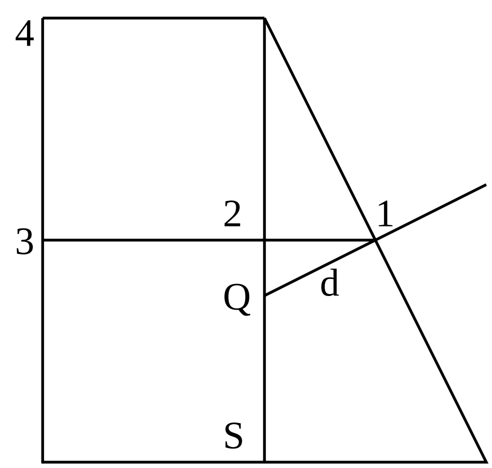
$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \frac{U_1 - U_Q}{d} = \frac{1}{2}$$

Men U_Q er ikke kjent, så vi bruker lineær interpolasjon mellom U_2 og U_S. Resultatet blir

$$U_Q \approx \frac{\ell_{2Q}}{h} U_S + \frac{\ell_{SQ}}{h} U_2 = \frac{1}{4} U_S + \frac{3}{4} U_2$$

Dermed blir diskretiseringen av randkravet

$$\frac{4}{h\sqrt{5}}\left(U_1 - \frac{3}{4}U_S - \frac{1}{4}U_2\right) = \frac{1}{2}$$



For å sjekke konsistens ser vi på Taylorrekka omkring node 1 (x, y) av eksakt løsning innsatt i formel

$$\frac{4}{h\sqrt{5}}(u(x,y) - \frac{1}{4}u(x-\frac{h}{2}, y-h) - \frac{3}{4}u(x-\frac{h}{2}, y) - \frac{1}{2} = (\frac{\partial u}{\partial n}(x,y) - \frac{1}{2}) - \frac{h}{2\sqrt{5}}(u_{xx} + u_{xy} + u_{yy})(x,y)) + \mathcal{O}(h^2)$$

så det følger at randkravet er konsistent diskretisert.

Litt spesielt blir også diskretiseringen i node 2 siden $h_{\O} = \frac{1}{2}h$, en får dermed

$$(\Delta u)_2 \approx \frac{1}{h^2}(\frac{4}{3}\,U_V + \frac{8}{3}\,U_{\O} + U_N + U_S - 6\,U_2) = 0$$

For alle andre noder brukes vanlig 5-pktsformel. Innsatt randverdier får en da

$$\begin{array}{rrrrrcl}
U_1 & -\frac{1}{4}U_2 & & & & = & \frac{1}{8}\,h\,\sqrt{5} \\
\frac{8}{3}\,U_1 & -6\,U_2 & +\frac{4}{3}\,U_3 & & & = & -1 \\
 & U_2 & -4\,U_3 & +U_4 & & = & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\
 & & U_3 & -4\,U_4 & +U_5 & = & -2 \\
 & & & U_4 & -4\,U_5 & = & -\sqrt{2}
\end{array}$$

For ordens skyld oppgir vi løsningen (det var ikke spurt om denne)

$$x_1 = 0.1534,\ x_2 = 0.3342,\ x_3 = 0.4470,\ x_4 = 0.7468,\ x_5 = 0.5403$$