Løsningsforslag til eksamen i SIF5045 Numerisk løsning av differensialligninger med differenseteknikker

Oppgave 1

a) Lokal avbruddsfeil T er

$$\begin{aligned}T =& 25y(x_n+4h) - 48y(x_n+3h) + 36y(x_n+2h)\\ &- 16y(x_n+h) + 3y(x_n) - bhy'(x_n)\\ =&(12-b)hy'(x_n) + (48-b)h^2y''(x_n) + O(h^3).\end{aligned}$$

Altså: Eksakt orden for $b = 12$.

b) Bruker Dahlquist sitt ekvivalensteorem:

Konvergens $\Leftrightarrow$ rotbetingelsen og orden ≥ 1.

Vi har orden lik 1.

For rotbetingelsen må vi sjekke røttene til $\rho(r)$,

$$\rho(r) = 25r^4 - 48r^3 + 36r^2 - 16r + 3.$$

Vi ser at $\rho(1) = 0$, altså får vi

$$\begin{aligned}\rho(r) &= (r-1)(25r^3 - 23r^2 + 13r - 3)\\ &= (r-1)(r-0.3815)(r-r_1)(r-r_2),\end{aligned}$$

hvor $|r_1| = |r_2| = \sqrt{r_1r_2} = 0.5609$. Altså tilfredstiller metoden rotbetingelsen og er derfor konvergent.

c) Vi har en 4-skritts BDF-metode av orden 4, gitt i boken. Vi finner lett av orden 4 at

$$b = 12.$$

For feilkonstanten har vi med $\rho(w) = 25w^4 - 48w^3 + 36w^2 - 16w + 3$, $\sigma(w) = 12w^4$, $b = 12$,

$$\rho(w) - 12w^4\ln(w) = -\frac{12}{5}(w-1)^5 + O((w-1)^6),$$

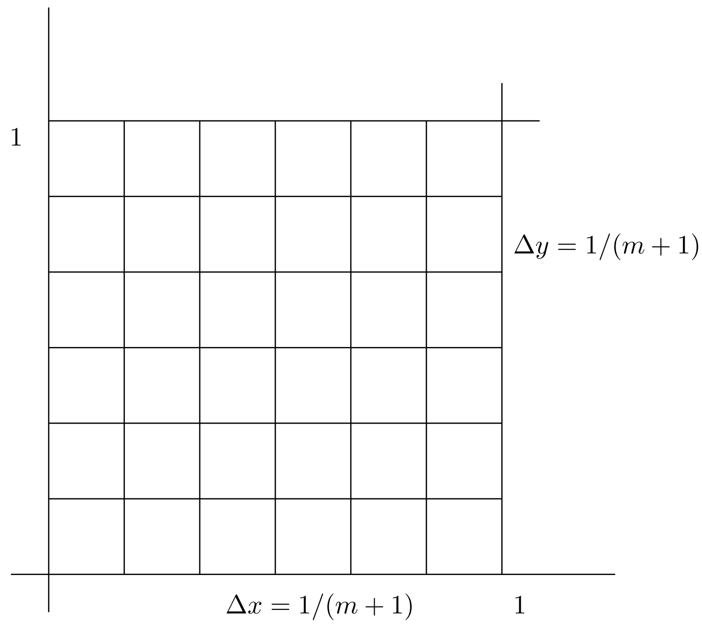
altså er feilkonstanten $c = -\frac{12}{5}$.

d) Siden vi har en 4-skritts BDF-metode av orden 4 sier Teorem 2.4 at metoden er konvergent.

e) Av Teorem 4.11 kan vi ikke ha høyere orden enn 2 for en flerskrittsmetode som er A-stabil. Vår metode er av orden 4 og er derfor ikke A-stabil.

Oppgave 2

a) Vi setter:



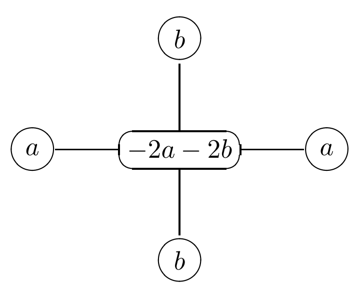
Den numeriske tilnærmelsen blir

$$a\nabla^2_{0,x} + b\nabla^2_{0,y} = -6h^2, \quad h = \Delta x = \Delta y = \frac{1}{m+1}.$$

Dette er ekvivalent med

$$aU_{i-1,j} + (-2a - 2b)U_{i,j} + aU_{i+1,j} + bU_{i,j-1} + bU_{i,j+1} = -6h^2.$$

Beregningsmolekylet blir



som leder til $AU = F$ hvor

$$A = \begin{bmatrix} B & bI & & 0 \\ bI & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & bI \\ 0 & & bI & B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m^2 \times m^2}$$

med

$$B = \begin{bmatrix} -2a-2b & a & & 0 \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & a & -2a-2b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

og

$$F = -16h^2 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} g_{11} \\ \vdots \\ g_{mm} \end{bmatrix} - b \begin{bmatrix} g'_{11} \\ \vdots \\ g'_{mm} \end{bmatrix},$$

hvor

$$g_{ij} = \begin{cases} g(0, j\Delta y) & i = 1 \\ g(1, j\Delta y) & i = m \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases} \quad \text{og} \quad g'_{ij} = \begin{cases} g(i\Delta y, 0) & j = 1 \\ g(i\Delta y, 1) & j = m \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

b) Vi anvender beviset for Teorem 7.4 og finner lett at A er regulær siden a og b er positive.

Oppgave 3

a) Vi har

$$U_i^{n+1} - U_i^n = \mu \nabla_{0,x}^2 U_i^{n+1} = \mu(U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}), \quad \mu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}. \tag{1}$$

Avbruddsfeilen T_i^n utvikler vi om t_{n+1} og får

$$\begin{aligned} T_i^n &= u_i(x_i, t_{n+1}) - u_i(x_i, t_{n+1} - \Delta t) - \mu(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) \\ &= (\Delta t u_t - \underbrace{\Delta x^2 \mu}_{=\Delta t} u_{xx} + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^4))_i^{n+1} \\ &= (\Delta t \underbrace{(u_t - u_{xx})}_{=0} + O(\Delta x^4))_i^{n+1} \\ &= O(\Delta x^4). \end{aligned} \tag{2}$$

b) Vi subtraherer (1) fra (2) og setter $e_i^n = u_i^n - U_i^n$:

$$e_i^{n+1} = e_i^n + \mu(e_{i+1}^{n+1} - 2e_i^{n+1} + e_{i-1}^{n+1}) - T_i^n.$$

Vi setter $|T_i^n| \leq C\Delta x^4$ og $\eta^n = \max_i |e_i^n|$:

$$(1 + 2\mu)|e_i^{n+1}| \leq \eta^n + 2\mu\eta^{n+1} + C\Delta x^4.$$

Dette gir

$$
\begin{aligned}
(1+2\mu)\eta^{n+1} &\leq \eta^n + 2\mu\eta^{n+1} + C\Delta x^4 \\
\Rightarrow \quad \eta^{n+1} &\leq \eta^n + C\Delta x^4 \\
\Rightarrow \quad \eta^n &\leq Cn\Delta x^4 = Cn\Delta x^2 \Delta x^2 \\
&= Cn\mu^{-1}\Delta t \Delta x^2 \\
&= C\mu^{-1} t^* \Delta x^2, \quad t^* = n\Delta t.
\end{aligned}
$$

Altså: $\eta^n \to 0$ når $\Delta x \to 0$ og μ holdes konstant.