**LØSNING FOR EKSAMEN I FAG 75316, NUMERISK LØSNING AV DIFFERENSIALLIGNINGER, VÅR 1994.**

**Oppgave 1** Vi skal løse startverdiproblemet

$$
\begin{aligned}
&u_t = u_{xx}, \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\
&u(x,0) = f(x), \qquad -\infty < x < \infty
\end{aligned}
$$

og vi ønsker en eksplisitt formel med diskretiseringsfeil $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$. La $u_m^n = u(x_m, t_n)$ med $x_m = mh$ og $t_n = nk$.

**(a)** Vi har

$$
u_m^{n+1} = \left(1 + k\partial_t + \frac{1}{2}k^2\partial_t^2\right) u_m^n + \mathcal{O}(k^3) = \left(1 + k\partial_x^2 + \frac{1}{2}k^2\partial_x^4\right) u_m^n + \mathcal{O}(k^3)
$$

Vi innfører nå sentraldifferenser for $\partial_x^2$ og $\partial_x^4$ og får

$$
u_m^{n+1} = u_m^n + k\left(\frac{1}{h^2}\delta_x^2 u_m^n + \mathcal{O}(h^2)\right) + \frac{1}{2}k^2\left(\frac{1}{h^4}\delta_x^4 + \mathcal{O}(h^2)\right) + \mathcal{O}(k^3)
$$

Dermed fås

$$
\tau_m^n = \mathcal{O}(k^3 + kh^2)
$$

En kan selvsagt også regne ut de dominerende leddene i $\tau_m^n$ selv om dette er adskillig mer arbeidskrevende. En får i så fall

$$
\tau_m^n = \left(\frac{1}{6}k^3\partial_x^6 - \frac{1}{12}kh^2\partial_x^4\right) u_m^n + \cdots
$$

**(b)** Sett på vanlig måte

$$
U_m^n = \xi^n \, e^{i\beta m}
$$

En får

$$
\xi = 1 + 2r(\cos\beta - 1) + \frac{1}{2}r^2(2(\cos\beta - 1)^2) = 1 - 4r\sin^2\frac{\beta}{2} + 8r^2\sin^4\frac{\beta}{2}
$$

Forlanger at $|\xi| \le 1$ dvs $-1 \le \xi \le 1$. Den siste ulikheten gir

$$
4r\sin^2\frac{\beta}{2}\left(1 - 2r\sin^2\frac{\beta}{2}\right) \ge 0
$$

som direkte gir oss kravet $r \le \frac{1}{2}$. Den andre ulikheten leder til

$$
4r^2\sin^4\frac{\beta}{2} - 2r\sin^2\frac{\beta}{2} + 1 \ge 0
$$

som holder for alle $\beta$ og $r$. Von Neumann betingelsen blir dermed $r \le \frac{1}{2}$.

**(c)** En har

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} &= \quad (1 + r\delta_x^2 + \tfrac{1}{2}r^2\delta_x^4)\, u_m^n + \tau_m^n \\ U_m^{n+1} &= \quad (1 + r\delta_x^2 + \tfrac{1}{2}r^2\delta_x^4)\, U_m^n \end{aligned}$$

og subtraksjon av ligningene gir

$$e_m^{n+1} = \left(1 + r\delta_x^2 + \frac{1}{2}r^2\delta_x^4\right) e_m^n + \tau_m^n$$

Skriver vi ut sentraldifferensene og ordner om leddene får vi

$$e_m^{n+1} = (1-2r+3r^2)e_m^n + r(1-2r)(e_{m-1}^n + e_{m+1}^n) + \frac{1}{2}r^2(e_{m-2}^n + e_{m+2}^n) + \tau_m^n$$

Når vi nå skal ta absoluttverdi og bruke trekantulikheten, er det viktig å merke seg at koeffisientene foran de ulike $e$-ene alle er ikke-negative når $0 \le r \le \frac{1}{2}$. Vi får

$$|e_m^{n+1}| \le (1-2r+3r^2+2r(1-2r)+2\frac{1}{2}r^2) \max_m |e_m^n| + k\mu = \max_m |e_m^n| + k\mu$$

Spesielt er selvfølgelig

$$\max_m |e_m^{n+1}| \le \max_m |e_m^n| + k\mu$$

Hvis vi nå forutsetter at initialverdiene er gitt eksakt, så er $e_m^0 = 0$ for alle $m$. Ved induksjon følger videre at

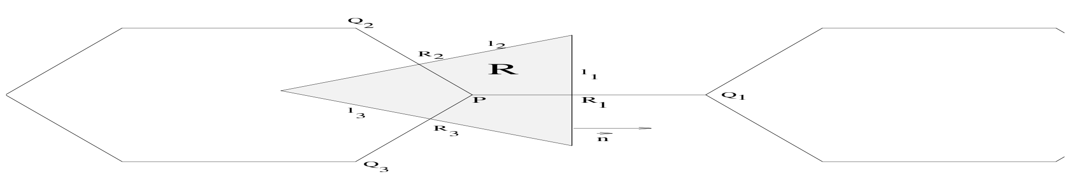
$$\max_m |e_m^n| \le nk\mu \le \mu T = CT(h^2 + k^2)$$

så formelen oppfylte våre forhåpninger angående global feil.

**Oppgave 2.** Vi skal løse det selvadjungerte Dirichletproblemet

$$(a\, u_x)_x + (a\, u_y)_y = 0$$

ved differensmetode på et heksagonalt nett som på figuren.



**(a)** Formelen utledes ved hjelp av boksintegrasjon. Fra hintet fås

$$0 = \int_{\mathcal{R}} ((a\,u_x)_x + (a\,u_y)_y)\,dA = \int_{\mathcal{R}} \nabla\cdot(a\nabla u)\,dA = \int_{\partial\mathcal{R}} a\frac{\partial u}{\partial n}\,dS$$

Vi lar $\mathcal{R}$ være den skraverte trekanten på figuren og approksimerer randintegralet. For å gjøre dette, merk at langs sidekant $l_j$ av $\mathcal{R}$ kan vi approksimere $a\partial u/\partial n$ med $a_{R_j}(u_{Q_j} - u_P)/h$. Lar vi lengden av sidekantene i (den likesidete) trekanten være $l$, fås

$$0 = \int_{\partial\mathcal{R}} a\frac{\partial u}{\partial n}\,dS \approx \sum_{j=1}^{3} a_{R_j}(u_{Q_j} - u_P)\frac{l}{h}$$

og derav følger formelen.

**(b)** Med $a \equiv 1$ blir differensformelen etter multiplikasjon med $-\frac{1}{3}$

$$U_P - \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} U_{Q_j} = 0$$

For alle 6 nodene $P$ vil nøyaktig en av nabonodene $U_{Q_j}$ være en randnode og de to andre vil være indre noder. La oss kalle randnodenaboen til node $i$ for $f_i$. Da blir systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix}$$

$A$ er altså matrisen ovenfor. $A$ er åpenbart symmetrisk. Fra Gerschgorins sirkelteorem ser vi at alle egenverdiene ligger i intervallet $[1/3, 5/3]$, så $A$ er positiv definitt. For å se at den er 2-syklisk, benytter vi partisjonen

$$S = \{1,4,5\}, \qquad T = \{2,3,6\}$$

og ser at for $i \neq j$ vil $a_{ij} \neq 0 \Rightarrow (i \in S, j \in T$ eller $j \in S, i \in T)$. For å vise at $A$ er konsistent ordnet, se på

$$B(\alpha) = \alpha L + \frac{1}{\alpha}U = \begin{bmatrix} 0 & 1/(3\alpha) & 1/(3\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ \alpha/3 & 0 & 0 & 1/(3\alpha) & 0 & 0 \\ \alpha/3 & 0 & 0 & 0 & 1/(3\alpha) & 0 \\ 0 & \alpha/3 & 0 & 0 & 0 & 1/(3\alpha) \\ 0 & 0 & \alpha/3 & 0 & 0 & 1/(3\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & \alpha/3 & \alpha/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Sett $D(\alpha) = \operatorname{diag}(1,\alpha,\alpha,\alpha^2,\alpha^2,\alpha^3)$. Vi beregner så $D(\alpha)^{-1}B(\alpha)D(\alpha) = B(1)$, så en similærtransformasjon av $B(\alpha)$ blir uavhengig av $\alpha$. Vi fastslår at egenverdiene til $B(\alpha)$ ikke avhenger av $\alpha$, så $A$ er konsistent ordnet.

**(c)** Av Gerschgorins sirkelteorem har vi at alle egenverdiene til $B = I - A$ må ligge i intervallet $[-2/3, 2/3]$. Når det i tillegg holder at $B$ har en egenverdi lik $2/3$, følger det at $\rho(B) = 2/3$. Det gjenstår nå bare å benytte formelen for $\omega_b$. Vi får

$$\omega_b = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(B)^2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}/3} \approx 1.146$$

**(d)** Vi antar at størrelsene $a_{R_j}$ kan approksimeres ved $a_{R_j} \approx \frac{1}{2}(a_{Q_j} + a_P)$. Differensformelen kan skrives

$$U_P - \sum_{j=1}^{3} \frac{a_{R_j}}{\sum_{k=1}^{3} a_{R_k}} U_{Q_j} = 0$$

Sett for enkelthets skyld $b_j = a_{R_j} / \sum_{k=1}^{3} a_{R_k}$. Da kan SOR formuleres direkte på nettet ved formelen

$$U_P^{(k+1)} = (1 - \omega) U_P^{(k)} + \omega \sum_{j=1}^{3} b_j U_{Q_j}^{(k+\delta_j)}$$

der $\delta_j = 1$ hvis $Q_j$ sin indeks er *mindre* enn $P$ sin indeks, og $\delta_j = 0$ ellers. Vi lager en matlabfunksjon som implementerer en iterasjon av SOR, med de gitte spesifikasjoner. Vi tar lite hensyn til effektivitet siden vi beregner koeffisientene $b_j$ om igjen for hver iterasjon

```
function U1=SORheks(omega,N,a,NABO,U)
%
% Implementerer en iterasjon av SOR for losning av
% elliptisk ligning paa et heksagonalt nett.
% For dokumentasjon, se oppgavetekst og teksten ovenfor.
%
U1=U;
for i=1:N,
  for j=1:3,
    ar(j)=1/2*(a(NABO(i,j))+a(i));  % Bruk linear interpolasjon
  end                               % for aa finne a_{R_{j}}

  b=ar/sum(ar);                     % Finn koeff i skalert versjon.

  U1(i)=(1-omega)*U1(i);
  for j=1:3,
    U1(i)=U1(i)+omega*b(j)*U1(NABO(i,j)); % Dette er selve SOR formelen.
  end
end
```

**Oppgave 3.** Vi løser Poissons ligning med elementmetoden, og elementene er trapeser. Det ene trapeset vi ser på har hjørner i

$$(h,\ 0)\,, \quad \left(\frac{h}{2},\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\,h\right), \quad \left(-\frac{h}{2},\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\,h\right), \quad (-h,\ 0)$$

**(a)** Tre av formfunksjonene er gitt. Vi ser raskt at den som mangler skal har verdien 1 i hjørnet $(-h, 0)$ og 0 i de andre hjørnene. At den er bilineær samt kravene til nullpunkter gjør at den må ha formen

$$\psi_4(x, y) = a(x - h)(2y - \sqrt{3}h)$$

der $a$ er en konstant som bestemmes fra at $\psi_4(-h, 0) = 1$. Dette kravet fører til $a \cdot (-2h) \cdot (-\sqrt{3}h) = 1$, dvs $a = \sqrt{3}/(6h^2)$ og

$$\psi_4(x, y) = \frac{1}{6}\sqrt{3}\frac{1}{h^2}(x - h)(2y - h\sqrt{3})$$

**(b)** Elementstivhetsmatrisen beregnes enkelt ved formelen

$$\alpha_{pq}^E = a^E(\psi_p, \psi_q) = \int_E \nabla\psi_p \cdot \nabla\psi_q \, dA$$

Siden formfunksjonene er bilineære, blir produktet av gradientene kvadratiske og en kan benytte den oppgitte integralformelen. Her er hele elementstivhetsmatrisen:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{7\sqrt{3}}{24} & -\frac{5\sqrt{3}}{24} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{7\sqrt{3}}{24} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{5\sqrt{3}}{24} \\ -\frac{5\sqrt{3}}{24} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{7\sqrt{3}}{24} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{5\sqrt{3}}{24} & -\frac{7\sqrt{3}}{24} & \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix}$$

**Oppgave 4.** Fra formelen fås at $U_m^n$ avhenger av $U_{m-2n}^0, \ldots, U_{m+2n}^0$, så avhengighetsintervallet for $U_m^n$ blir $I_m^n = [x_m - 2nh, x_m + 2nh] = [x_m - 2t_n/p, x_m + 2t_n/p]$. Karakteristikken gjennom $(x_m, t_n)$ skjærer $x$-aksen i $x_m - at_n$ dvs CFL gir

$$x_m - 2\,\frac{t_n}{p} \leq x_m - at_n \leq x_m + 2\,\frac{t_n}{p} \;\;\Leftrightarrow\;\; |ap| \leq 2$$

Von Neumann: Sett $U_m^n = \xi^n e^{i\beta m}$. Dette gir

$$\xi = 1 + \frac{1}{3}iap(\sin\beta + \sin 2\beta) = 1 + \frac{1}{3}iap\sin\beta(1 + \cos\beta)$$

Dermed er

$$|\xi|^2 = 1 + \frac{1}{9}(pa)^2\sin^2\beta(1 + \cos\beta)^2$$

så metoden er ustabil for enhver positiv $h, k$. Dette er et eksempel på at CFL-kriteriet på ingen måte er tilstrekkelig for konvergens. Metoden som foreslås er konsistent. CFL-kriteriet gir dobbelt så stort tillatt intervall for $|ap|$ som Lax-Wendroff. Men i Lax-Wendroff tilfellet gir Von Neumann og CFL kriteriet samme begrensning på $|ap|$.