Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Trond Kvamsdal (93058702)

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAGET TMA4212 NUMERISK LØSNING AV DIFFERENSIALIGNINGER MED DIFFERANSEMETODER

Lørdag 18. august, 2012
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator tillatt.
Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler er tillatt.

Oppgave 1 Gitt S/R-problemet

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \ t > 0 & (1)\\
u(x,0) &= 1, \quad 0 \le x \le 1 & (2)\\
\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= u(0,t), \quad t > 0 & (3)\\
u(0,t) &= 1, \quad t \ge 0 & (4)\\
u(1,t) &= 1, \quad t \ge 0 & (5)
\end{aligned}
$$

hvor u er den ukjente løsningen til differensialigningen.

a) Diskretiser denne ligningen ved å benytte sentraldifferenser i rom, og Eulers metode i tid. Definer vektoren $[U_1^n, \ldots, U_M^n], h = 1/(M+1)$, og vis at differensmetoden oppfyller en rekurrenslignig av typen

$$U^{n+1} = CU^n, \quad C \in R^{MxM} \qquad (6)$$

Bestem matrisen C.

b) La $r = k/h^2$ der k er tidskrittet, og vis at metoden er stabil for skrittlengder som oppfyller $2r \le 1$.

c) Erstatt randkravet i ligning (4) med flgende randkrav:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = u(0,t), \qquad t > 0 \tag{7}$$

Diskretiser S/R-problemet ovenfor (med ligning (7) istedet for ligning (4)) ved å benytte sentraldifferenser i rom, og Eulers metode i tid. Anta et rektangulært grid med $\delta x = h = 0.1$ og $\delta t = k = 0.002$, hvor randkravet i ligning (7) approksimeres med **sentral-differanser**. Bruk denne diskretiseringen til beregne numerisk løsning i punktene (1,0.002) og (1,0.004) i x-t planet.

Oppgave 2 Gitt det to-dimensjonale Poisson problemet

$$-\nabla^2 u = f \quad \text{i} \quad \Omega \tag{8}$$

med følgende randkrav:

$$u = 0 \quad \text{på} \quad \partial\Omega_D \tag{9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{på} \quad \partial\Omega_N. \tag{10}$$

hvor u er den ukjente løsningen og f er påført belastning . Området $\Omega \in R^2$ antas å være et polygon med rand $\partial\Omega$ og flatenormal n, se Figur 1. Vi antar homogene Dirichlet og Neumann randkrav langs henholdsvis $\partial\Omega_D$ og $\partial\Omega_N$. Her er $\partial\Omega_N$ unionen av det halvåpne intervallet $(-1,0]$ langs x-aksen og det halvåpne intervallet $[0,1)$ langs y-aksen, samt at $\partial\Omega_D = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_N$. Den påførte belastning f antas være konstant i hele området Ω.

a) Bruk Galerkins metode og finn den svake formen (variasjonsproblemet) for Poisson PDE-problemet gitt i ligning (8)-(10) på følgende form: Finn $u \in X$ slik at

$$a(u,v) = l(v) \qquad \forall v \in X \tag{11}$$

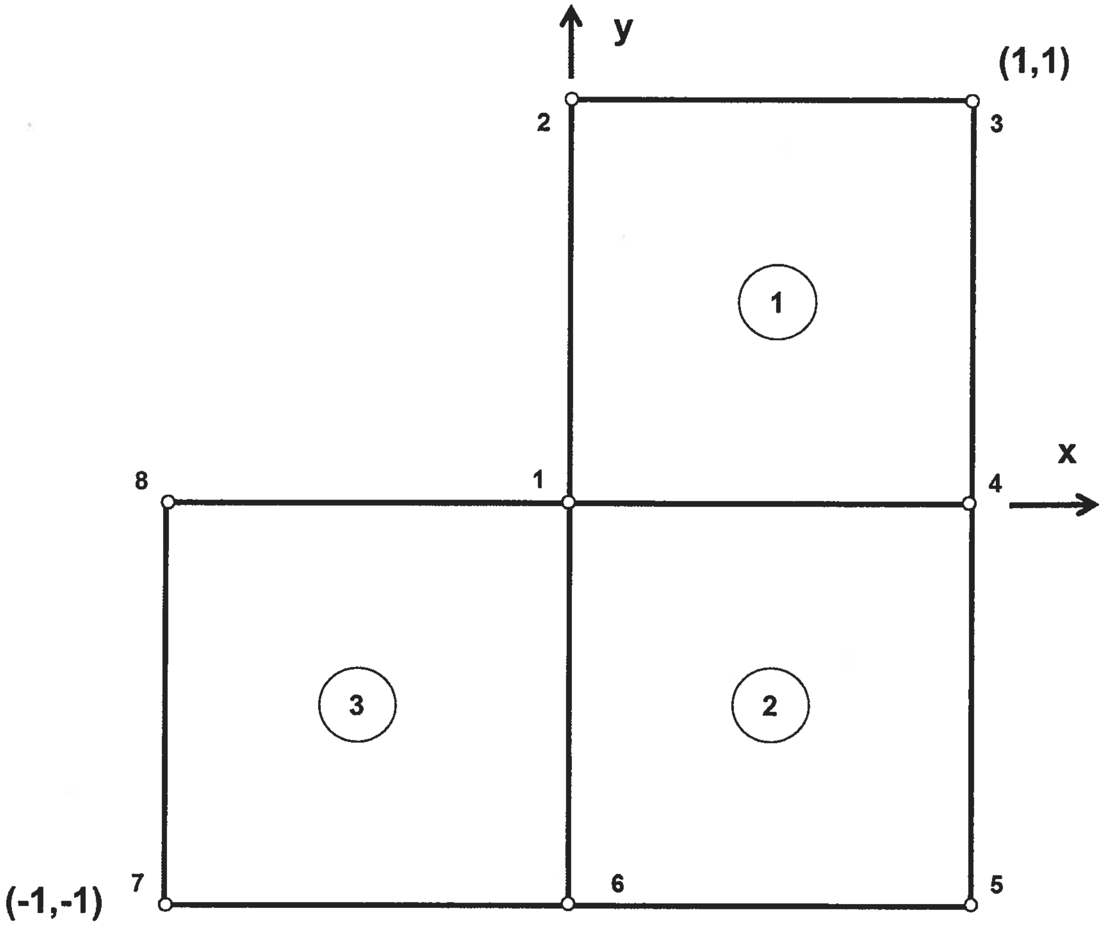
Spesifiser spesielt X, a og l for dette problemet.

b) Anta at vi velger å bruke endelig elementmetode for å løse (11) numerisk. Formuler det tilhørende endelig element variasjonsproblemet.

I Figur 1 vises området Ω som er diskretisert med 3 bilineære firkanter.

c) Beregn leddene $a(\phi_1,\phi_1)$ og $l(\phi_1)$, hvor ϕ_1 er basisfunksjonen tilhørende node 1 i Figur 1.

d) Finn $u_h \in X_h$, dvs. løs elementmetodeproblemet vist i Figur 1.



Figur 1: Området Ω diskretisert med 3 bilineære firkanter og 8 noder.

Oppgave 3

Vi ser på det hyperbolske problemet

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \qquad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0 && (12)\\
u(x,0) &= f(x), \qquad -\infty < x < \infty, && (13)
\end{aligned}
$$

hvor a er en konstant og u er den ukjente løsningen til differensialligningen.

a) Hvis vi antar en differenseformel på formen

$$
U_i^{j+1} = \alpha_{-1}U_{i-1}^j + \alpha_0 U_i^j + \alpha_1 U_{i+1}^j \tag{14}
$$

Hva er en nødvendig betingelse for konvergens? Begrunn svaret

Lax-Wendroffs metode for denne ligningen er:

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{ap}{2}\left(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j\right) + \frac{1}{2}(ap)^2\delta_x^2 U_i^j \tag{15}$$

Her har vi brukt romlig skrittlengde lik h og skrittlengde i tid lik k samt at $p = k/h$.

b) Vis at løsningen u til (12) er løsning til Lax-Wendroff ligningen (15) når $ap = 1$. Kommenter dette resultatet i relasjon til det hyperbolske problemets (12) karakteristikker.

c) La $a = 4$ og $f(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$ i det hyperbolske problemet ovenfor. Anta at vi bruker Lax-Wendroffs differansemetode til å løse dette problemet med $k = 0.25$ og $h = 1$. Finn den numerisk beregnede løsningen i punktene $(0, 4)$ og $(4, 8)$ i x-t planet.

Gitt følgende system av differensialligninger:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + 4\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{17}$$

d) Vis at systemet av differensialligninger gitt i (16) og (17) er hyperbolskt.

e) Finn karakteristikkene til det hyperbolske systemet gitt i (16) og (17).