Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Trond Kvamsdal (93058702)

EKSAMEN I FAGET TMA4212
NUMERISK LØSNING AV DIFFERENSIALIGNINGER MED DIFFERANSEMETODER

Torsdag 7. juni, 2012
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator tillatt.
Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler er tillatt.

Oppgave 1 Gitt S/R-problemet

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \; t > 0 && (1)\\
u(x,0) &= 1, \quad 0 \leq x \leq 1 && (2)\\
u(0,t) &= 1, \quad t \geq 0 && (3)\\
\frac{\partial u}{\partial x}(1,t) &= u(1,t), \quad t > 0 && (4)
\end{aligned}
$$

hvor u er den ukjente løsningen til differensialigningen.

a) Diskretiser denne ligningen ved å benytte sentraldifferenser i rom, og Eulers metode i tid. Anta et rektangulært grid med $\delta x = h = 0.1$ og $\delta t = k = 0.002$, hvor randkravet i ligning (4) approksimeres med **sentral-differanser**.

b) Bruk diskretiseringen i a) og beregn numerisk løsning i punktene (1,0.002) og (1,0.004) i x-t planet.

c) Diskretiser denne ligningen ved benytte sentraldifferenser i rom, og Eulers metode i tid. Anta et rektangulært grid med $\delta x = h = 0.1$ og $\delta t = k = 0.002$, hvor randkravet i ligning (4) approksimeres med **bakover-differanser**.

d) Bruk diskretiseringen i c) og beregn numerisk løsning i punktene (1,0.002) og (1,0.004) i x-t planet.

e) Anta at vi erstatter randkravet i ligning (4) med en Dirichlet randbetingelse. Hva kan du si om egenskapene til differensemetoden hvor en benytter sentraldifferenser i rom og Eulers metode i tid, på et rektangulært grid med $\delta x = h = 0.1$ og $\delta t = k = 0.002$?

Gitt det to-dimensjonale Poisson problemet

$$-\nabla^2 u \;=\; f \quad \text{i} \quad \Omega \tag{5}$$

med følgende randkrav:

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{p} \quad \partial\Omega_D &(6)\\ H(u) &= 0 \;\; \text{p} \quad \partial\Omega_N. &(7) \end{aligned}$$

hvor u er den ukjente løsningen og f er påført belastning. Området $\Omega \in R^2$ antas å være et polygon med rand $\partial\Omega$. Vi antar homogene Dirichlet og Neumann randkrav langs henholdsvis $\partial\Omega_D$ og $\partial\Omega_N$. Her er $\partial\Omega_N$ unionen av det halvåpne intervallet $(-1, 0]$ langs x-aksen og det halvåpne intervallet $[0, 1)$ langs y-aksen, samt at $\partial\Omega_D = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_N$. Den påførte belastning f antas være konstant i hele området Ω.

Oppgave 2

a) I Figur 1 vises et område Ω som er diskretisert med et regulært gitter med $\delta x = \delta y = h$.

Bruk klassisk 5-punkts differenseformel for å diskretisere Poissonproblemet gitt i ligning (5)-(7) og sett opp det resulterende likningssystemet $AU = F$.

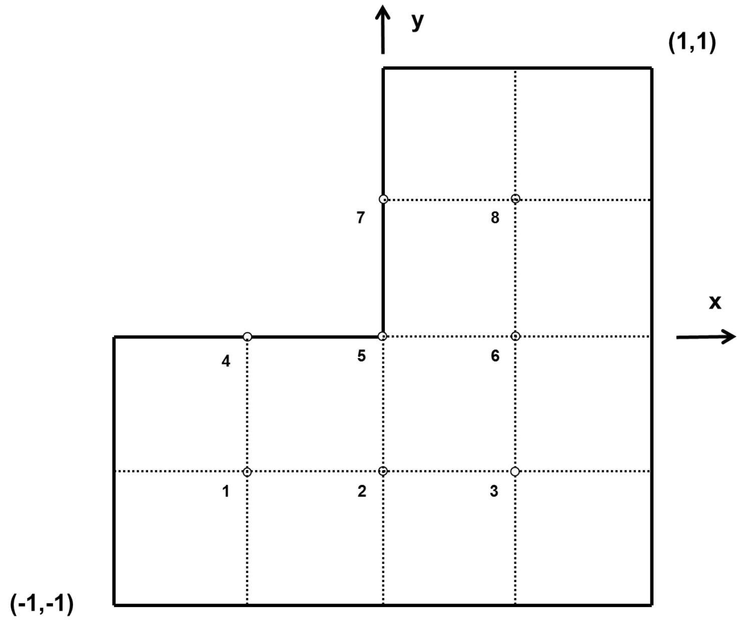
b) Anta at vi for Poissonproblemet vist i ligning (5)-(7) har homogene Neumann betingelser på hele randen, dvs. $\partial\Omega_N = \partial\Omega$. Er problemet da velstilt? Begrunn svaret.

Oppgave 3

a) Vi ser på ligningen $u_t + au_x = 0$ og antar en differenseformel på formen

$$U_i^{j+1} = \alpha_{-1}U_{i-1}^j + \alpha_0 U_i^j + \alpha_1 U_{i+1}^j \tag{8}$$

Hva er en nødvendig betingelse for konvergens? Begrunn svaret



Figur 1: Området Ω diskretisert med 8 frie gitterpunkt.

Oppgave 4

a) Bruk Galerkins metode og finn den svake formen (variasjonsproblemet) for Poisson PDE-problemet gitt i ligning (5)-(7) på følgende form: Finn $u \in X$ slik at

$$a(u,v) = l(v) \qquad \forall v \in X \tag{9}$$

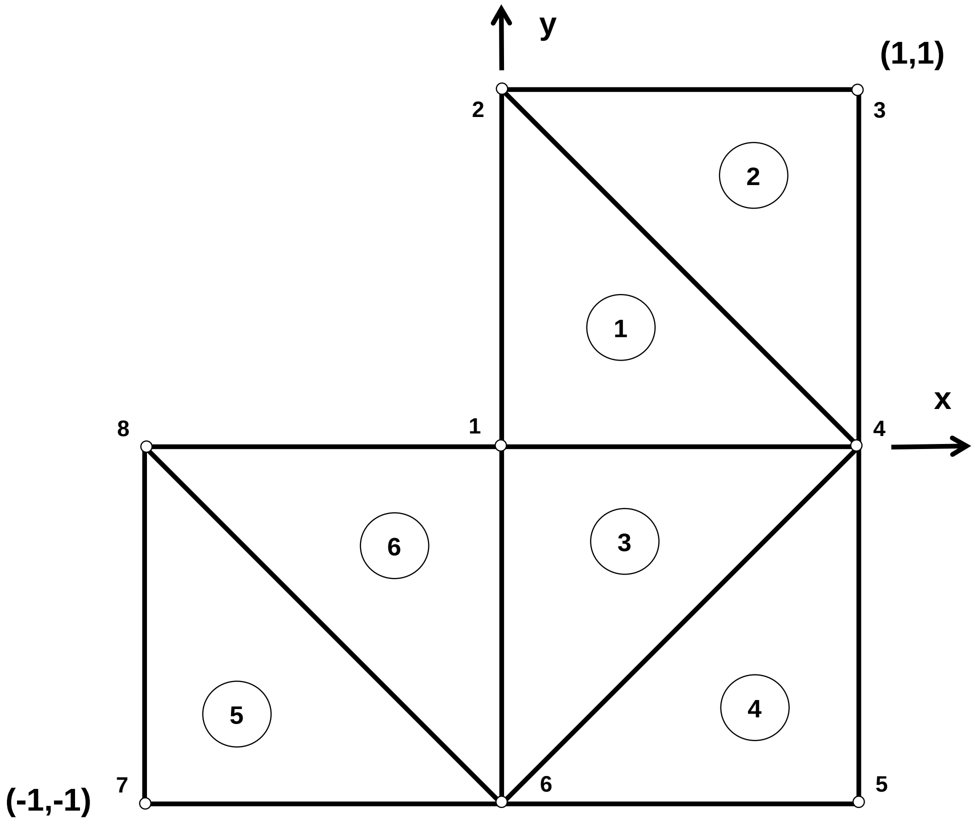
Spesifiser spesielt X, a og l for dette problemet.

b) Anta at vi velger å bruke endelig elementmetode for å løse (9) numerisk. Formuler det tilhørende endelig element variasjonsproblemet.

I Figur 2 vises et område Ω som er diskretisert med 6 lineære trekanter.

c) Beregn leddene $a(\phi_1, \phi_1)$ og $l(\phi_1)$, hvor ϕ_1 er basisfunksjonen tilhørende node 1 i Figur 2.

d) Finn $u_h \in X_h$, dvs. løs elementmetodeproblemet vist i Figur 2.



Figur 2: Området Ω diskretisert med 6 lineære trekanter og 8 noder.