LØSNING FOR EKSAMEN I FAG TMA4212, NUMERISK LØSNING AV DIFFERENSIALLIGNINGER MED DIFFERANSEMETODEN, VÅR 2011.

Oppgave 1. Vi løser Poissons ligning med elementmetoden, og elementene er trapeser. Det ene trapeset vi ser på har hjørner i

$$(h,\ 0)\,,\quad \left(\frac{h}{2},\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\,h\right),\quad \left(-\frac{h}{2},\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\,h\right),\quad (-h,\ 0)$$

(a) Tre av formfunksjonene er gitt. Vi ser raskt at den som mangler skal har verdien 1 i hjørnet $(-h,0)$ og 0 i de andre hjørnene. At den er bilineær samt kravene til nullpunkter gjør at den må ha formen

$$\psi_4(x,y) = a(x-h)(2y-\sqrt{3}h)$$

der a er en konstant som bestemmes fra at $\psi_4(-h,0)=1$. Dette kravet fører til $a\cdot(-2h)\cdot(-\sqrt{3}h)=1$, dvs $a=\sqrt{3}/(6h^2)$ og

$$\psi_4(x,y) = \frac{1}{6}\sqrt{3}\frac{1}{h^2}(x-h)(2y-h\sqrt{3})$$

(b) Elementstivhetsmatrisen beregnes enkelt ved formelen (se utgitt pdffil FEM4 side 32)

$$\alpha^E_{pq} = a^E(\psi_p,\psi_q) = \int_E \nabla\psi_p\cdot\nabla\psi_q\,dA$$

Siden formfunksjonene er bilineære, blir produktet av gradientene kvadratiske og en kan benytte den oppgitte integralformelen. Her er hele elementstivhetsmatrisen:

$$A^E = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{7\sqrt{3}}{24} & -\frac{5\sqrt{3}}{24} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{7\sqrt{3}}{24} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{5\sqrt{3}}{24} \\ -\frac{5\sqrt{3}}{24} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{7\sqrt{3}}{24} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{5\sqrt{3}}{24} & -\frac{7\sqrt{3}}{24} & \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix}$$

Oppgave 2 Vi skal løse startverdiproblemet

$$u_t = u_{xx}, \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = f(x), \qquad -\infty < x < \infty$$

og vi ønsker en eksplisitt formel med diskretiseringsfeil $\mathcal{O}(h^2+k^2)$. La $u_m^n = u(x_m, t_n)$ med $x_m = mh$ og $t_n = nk$.

(a) Vi har

$$u_m^{n+1} = \left(1 + k\partial_t + \frac{1}{2}k^2\partial_t^2\right) u_m^n + \mathcal{O}(k^3) = \left(1 + k\partial_x^2 + \frac{1}{2}k^2\partial_x^4\right) u_m^n + \mathcal{O}(k^3)$$

Vi innfører nå sentraldifferenser for ∂_x^2 og ∂_x^4 og får

$$u_m^{n+1} = u_m^n + k\left(\frac{1}{h^2}\delta_x^2 u_m^n + \mathcal{O}(h^2)\right) + \frac{1}{2}k^2\left(\frac{1}{h^4}\delta_x^4 + \mathcal{O}(h^2)\right) + \mathcal{O}(k^3)$$

Dermed fås

$$\tau_m^n = \mathcal{O}(k^2 + h^2)$$

En kan selvsagt også regne ut de dominerende leddene i τ_m^n selv om dette er adskillig mer arbeidskrevende. En får i så fall

$$\tau_m^n = \left(\frac{1}{6}k^2\partial_x^6 - \frac{1}{12}h^2\partial_x^4\right) u_m^n + \cdots$$

(b) Sett på vanlig måte

$$U_m^n = \xi^n \, e^{i\beta m}$$

En får

$$\xi = 1 + 2r(\cos\beta - 1) + \frac{1}{2}r^2(2(\cos\beta - 1)^2) = 1 - 4r\sin^2\frac{\beta}{2} + 8r^2\sin^4\frac{\beta}{2}$$

Forlanger at $|\xi| \le 1$ dvs $-1 \le \xi \le 1$. Den siste ulikheten gir

$$4r\sin^2\frac{\beta}{2}\left(1 - 2r\sin^2\frac{\beta}{2}\right) \ge 0$$

som direkte gir oss kravet $r \le \frac{1}{2}$. Den andre ulikheten leder til

$$4r^2\sin^4\frac{\beta}{2} - 2r\sin^2\frac{\beta}{2} + 1 \ge 0$$

som holder for alle β og r. Von Neumann betingelsen blir dermed $r \le \frac{1}{2}$.

(c) En har

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} &= \quad (1 + r\delta_x^2 + \tfrac{1}{2}r^2\delta_x^4)\, u_m^n + k\,\tau_m^n \\ U_m^{n+1} &= \quad (1 + r\delta_x^2 + \tfrac{1}{2}r^2\delta_x^4)\, U_m^n \end{aligned}$$

og subtraksjon av ligningene gir

$$e_m^{n+1} = \left(1 + r\delta_x^2 + \frac{1}{2}r^2\delta_x^4\right)\, e_m^n + k\,\tau_m^n$$

Skriver vi ut sentraldifferensene og ordner om leddene får vi

$$e_m^{n+1} = (1-2r+3r^2)e_m^n + r(1-2r)(e_{m-1}^n + e_{m+1}^n) + \frac{1}{2}r^2(e_{m-2}^n + e_{m+2}^n) + k\,\tau_m^n$$

Når vi nå skal ta absoluttverdi og bruke trekantulikheten, er det viktig å merke seg at koeffisientene foran de ulike e-ene alle er ikke-negative når $0 \le r \le \frac{1}{2}$. Vi får

$$|e_m^{n+1}| \le (1-2r+3r^2+2r(1-2r)+2\frac{1}{2}r^2)\max_m |e_m^n| + k\mu = \max_m |e_m^n| + k\mu$$

Spesielt er selvfølgelig

$$\max_m |e_m^{n+1}| \le \max_m |e_m^n| + k\mu$$

Hvis vi nå forutsetter at initialverdiene er gitt eksakt, så er $e_m^0 = 0$ for alle m. Ved induksjon følger videre at

$$\max_m |e_m^n| \le nk\mu \le \mu T = CT(h^2 + k^2)$$

så formelen oppfylte våre forhåpninger angående global feil.

Oppgave 3. Vi har $U_j^n = \xi^n e^{i\beta x_j}$ ved å insette i Lax-Friedriechs metode vi får

$$\xi = \cos\beta h - i\,r\,\sin\beta h, \quad \theta = \beta h, \quad r = ap.$$

Så

$$\xi^2 = \cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + \sin^2\theta - \sin^2\theta,$$
$$\xi^2 = 1 + (r^2 - 1)\sin^2\theta.$$

Metoden er stabil for $|r| \le 1$. Vi antar $|r| \le 1$ og betrakter $\sigma = 1 - r^2 \ge 0$, slik at

$$\xi^2 = 1 - \sigma\sin^2\theta,$$

og vi får

$$|\xi| = \sqrt{1 - \sigma\sin^2\theta} \le 1 - \frac{\sigma}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\theta^2 = 1 - 2\sigma\left(\sin^2\frac{\theta}{2} - \sin^4\frac{\theta}{2}\right),$$

see også TMA4212 notatet om dissipasjon og dispersjon og tekstboken (side 122-123)[1]. Vi kan anta $|\theta| \leq \pi$ som gir

$$|\xi| \leq 1 - \frac{\sigma}{2\,\pi^2}\theta^2, \quad \theta = \beta h.$$

Alternativt for å bruke tekstbooksdefinisjon ser man på

$$|\xi| = \sqrt{1 - \sigma \sin^2\theta} \leq 1 - \frac{\sigma}{2}\sin^2\theta = 1 - 2\sigma\left(\sin^2\frac{\theta}{2} - \sin^4\frac{\theta}{2}\right).$$

Man ser at $|\xi|$ er mindre enn 1 for nesten alle verdier av $\theta = \beta h$ men for $\beta h = \pi$ er $|\xi| = 1$. Metoden er ikke-dissipativt eller svak ikke-dissipativt.

For å analysere dispersjonen setter vi $\varphi = \alpha\beta k$ og

$$\xi = |\xi|e^{-i\varphi} = |\xi|\cos\varphi - i|\xi|\sin\varphi$$

slik at

$$\frac{-Im(\xi)}{Re(\xi)} = \tan\varphi = r\tan\theta,$$

siden også $\xi = \cos\theta - i\,r\sin\theta$.

Da hvis $r = 1$

$$\alpha = \frac{h}{k}$$

og metoden er ikke dispersiv.

Ellers hvis $r \neq 1$ da

$$\alpha = \frac{1}{\beta k}\arctan(r\tan(\beta h)),$$

d.v.s

$$\alpha = \alpha(\beta)$$

og metoden er dispersiv.

[1] J.C. Strikwerda, Finite difference schemes and partial differential equations, second edition, SIAM.