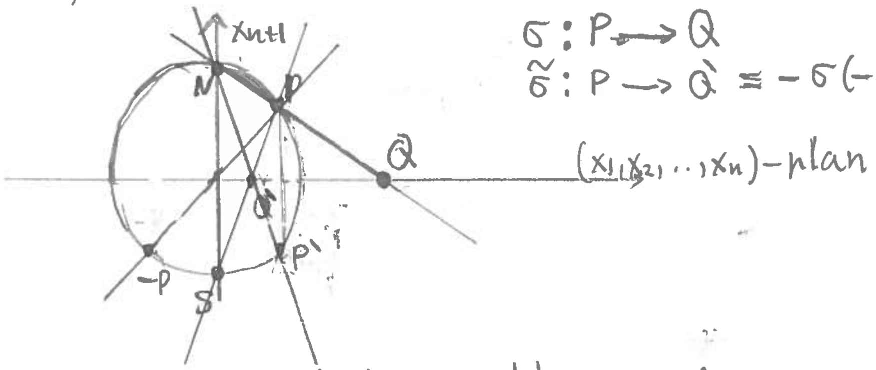
Øving 3 TMA4190
30/1 - 2014

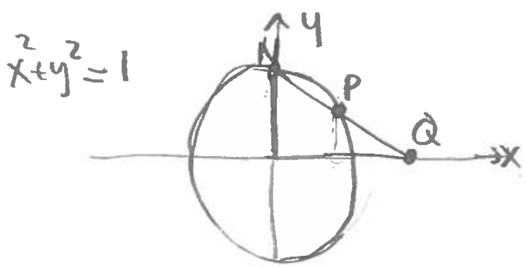
1-7 (Lee, side 30 2.utg.)

a) $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in S^n$, $\sum x_i^2 = 1$



$\sigma : P \to Q$
$\tilde{\sigma} : P \to \tilde{Q} = -\sigma(-P)$

La $P \in S^n$, $-P$ det antipodale punkt, og $P' = (-u, x_{n+1})$ når $P = (u, x_{n+1})$
Påstanden er at $Q = (u, 0) \in \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
Rotér $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ omkring x_{n+1}-aksen, dvs. rotér $\mathbb{R}^n$ (med ortogonal matrise $A \in SO(n)$), slik at alle punkta på figuren ovanfor ligg i (x_1, x_{n+1})-planet og P har positiv x_1-koordinat.



Set $y = x_{n+1}$, $x = x_1$ } koordinatar
$P = (x, y)$
$Q = (u, 0)$
$N = (0, 1)$

Enkel Euklidsk plangeometri gir (likeforma trekantar!)

$$\frac{1}{u} = \frac{y}{u - x}$$ (også OK om koordinatar er negative!)

Det gir $\boxed{u = \frac{x}{1-y}}$ $x > 0$.

Generelt, $P = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \longleftrightarrow (x, y)$

$$Q = \frac{(x_1, x_2, \dots, x_n, 0)}{1 - x_{n+1}} \longleftrightarrow \frac{(x, 0)}{1 - y}$$

At $\tilde{\sigma}$ er stereografisk projeksjon frå S følgjer også frå den første figuren.

b) For å kalkulere den inverse til σ, sjå først på situasjonen i xy-planet, illustrert ovanfor:

$$\sigma(x,y) = (u,0) = \left(\frac{x}{1-y}, 0\right), \quad \left(x \text{ og } u \geq 0\right)$$

$$x = \sqrt{1-y^2}$$

$$u = \frac{\sqrt{1-y^2}}{1-y} = \frac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{1-y}}$$

$$u^2 = \frac{1+y}{1-y} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{u^2-1}{u^2+1} \\ x = \frac{2u}{u^2+1} \end{cases}$$

$$\sigma^{-1} : (u,0) \longrightarrow (x,y) = \frac{1}{u^2+1}(2u, u^2-1)$$

I det generelle tilfelle, skriv $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ og erstatt u^2 med $|u|^2$. Vi får

$$\sigma^{-1} : (u,0) \longrightarrow \frac{1}{|u|^2+1}(2u, |u|^2-1) \in S^n$$

---

c) Transisjonsfunksjonen $\tilde{\sigma} \circ \sigma^{-1} = ?$

I xy-planet (som ovanfor) har vi

$$(x,y) \xrightarrow{\sigma} \frac{x}{1-y}, \quad (x,y) \xrightarrow{\tilde{\sigma}} \frac{x}{1+y} \qquad \left(\text{husk: } \tilde{\sigma}(P) = -\sigma(-P)\right)$$

$$u \neq 0; \; \tilde{\sigma} \circ \sigma^{-1} : u \xrightarrow{\sigma^{-1}} \left(\frac{2u}{u^2+1}, \frac{u^2-1}{u^2+1}\right) \xrightarrow{\tilde{\sigma}} \frac{\frac{2u}{u^2+1}}{1 + \frac{u^2-1}{u^2+1}} = \frac{1}{u}$$

For $\overset{\neq 0}{u} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ får vi difor analogt, $\tilde{\sigma} \circ \sigma^{-1} : u \longrightarrow \frac{u}{|u|^2}$

<u>Merk</u> Dette er ein <u>involusjon</u>, dvs. lik sin eigen invers!

d) La π vere ein av projeksjonane, $S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, som er kartfunksjonar. Det er lett å sjekke at alle funksjonar $\pi \circ \sigma^{-1}$, $\pi \circ \tilde{\sigma}^{-1}$ er glatte!