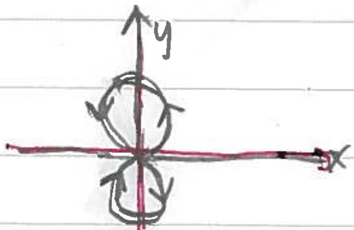
Øving 9

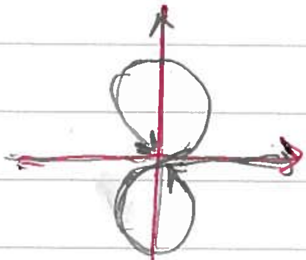
(Lee 5-4, 5-11)

5-4 Merk at talet 8 kan parametriserast såleis

$\mathbb{R} \xrightarrow{\beta} \mathbb{R}^2$, $t \to (\sin(2t), \sin t)$



som er injektiv hvis vi restrikterer β til $(-\pi, \pi)$:



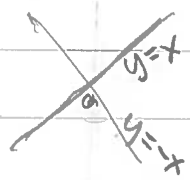
β er ein immersjon fordi $\beta'(t) \neq 0$ alltid,

og difor er $\beta : (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ein injektiv immersjon, slik at $\beta((-\pi, \pi))$ er ein immersert undermangfoldighet av $\mathbb{R}^2$.

Bildet er ikkje ein imbedda undermangfoldighet sidan 8-talet med indusert topologi frå $\mathbb{R}^2$ er ikkje homeomorf med $(-\pi, \pi)$, det er ikkje ein gong lokalt euklidsk!

5-11 $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}$, $\phi(x,y) = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

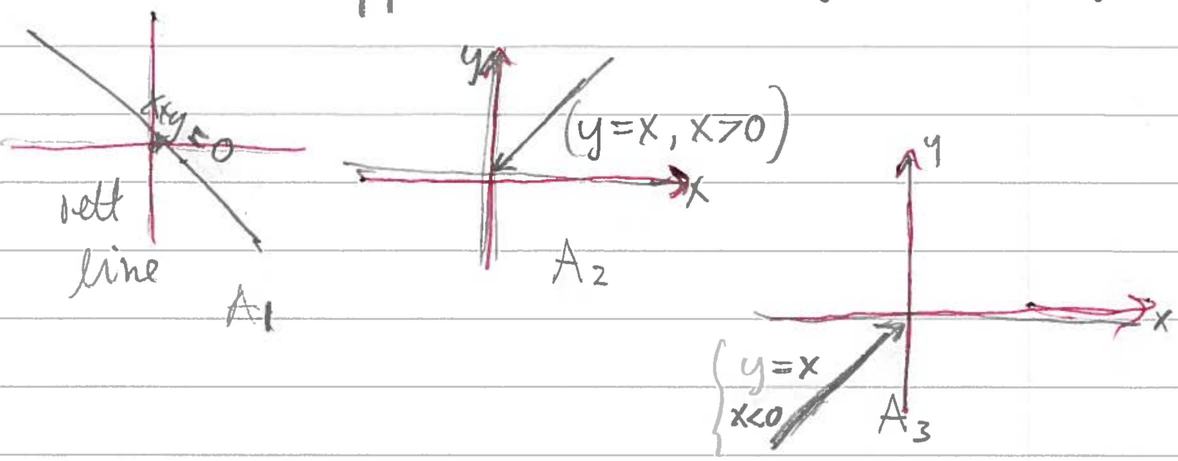
a) $\phi^{-1}(0) =$



$=$ 2 linjer som skjer kvarandre i $(0,0)$

Med underromstopologien frå $\mathbb{R}^2$ er ikkje $\phi^{-1}(0)$ lokalt euklidsk p.g.a singularitet i origo (skjeringspunktet)

(b) Vi kan dele opp $\phi^{-1}(0)$ i 3 disjunkte mengder



Kvar av desse er opplagt ein imbedda undermangfoldighet A_i av $\mathbb{R}^2$ og er diffeomorf med $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\phi_1} A_1 \,, \quad \mathbb{R} \xrightarrow{\phi_2} A_2 \,, \quad \mathbb{R} \xrightarrow{\phi_3} A_3$$

La $M = \mathbb{R}_{(1)} \cup \mathbb{R}_{(2)} \cup \mathbb{R}_{(3)}$ (3 disj. kopiar av $\mathbb{R}$)

Så M har 3 samanhengskomponentar.

Definer

$$\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\phi|_{\mathbb{R}_{(1)}} : \mathbb{R}_{(1)} \xrightarrow{\approx} A_1 \subset \mathbb{R}^2$$

$$\phi|_{\mathbb{R}_{(2)}} : \mathbb{R}_{(2)} \xrightarrow{\approx} A_2 \subset \mathbb{R}^2$$

$$\phi|_{\mathbb{R}_{(3)}} : \mathbb{R}_{(3)} \xrightarrow{\approx} A_3 \subset \mathbb{R}^2$$

$\phi(M) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A =$ 

Med underromstopologi frå $\mathbb{R}^2$ er ikkje A ein imbedda undermangfoldighet (sidan A er ikkje eingong lokalt Euklidsk)

Men

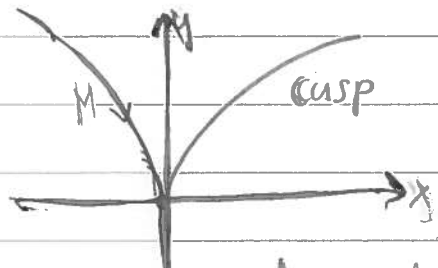
$$\phi : M \longrightarrow \phi(M) = A \subset \mathbb{R}^2$$

er ein injektiv immersjon. Så A er ein immersert Undermfd med 3 komponentar

Alle 3 komponentane til A er homeomorfe med $\mathbb{R}$;

$$\phi \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_{(1)} \xrightarrow{\cong} A_1 \\ \mathbb{R}_{(2)} \xrightarrow{\cong} A_2 \\ \mathbb{R}_3 \xrightarrow{\cong} A_3 \end{array} \right\} \text{union} = A$$

(c) $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \psi(x,y) = x^2 - y^3$



$M = \psi^{-1}(0) : x^2 - y^3 = 0$

M er ikkje ein imbedda undermangfoldighet.

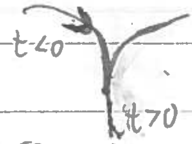
M er homeomorf med $\mathbb{R}$, med underromstopologi frå $\mathbb{R}^2$.

Hvis M var ein imbedda glatt undermfd av $\mathbb{R}^2$, ville

$T_0 M \subset T_0\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$

tangentrommet til M i origo, 1-dimensjonalt. Einaste kandidat er y-aksen. Ein tangentvektor v i origo til M kan representerast som hastighetsvektoren til ei kurve

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^2$$
$$\gamma(0) = 0$$
$$\gamma'(0) = v \in T_0 M, \quad v \neq 0$$



Vi ser at i så fall måtte $\gamma(t)$, $t > 0$, vere under x-aksen. Vi må difor ha $\gamma'(0) = 0 \in T_0 M$ for alle glatte kurver på M gjennom 0. Men då kan ikkje γ vere ein immersjon.

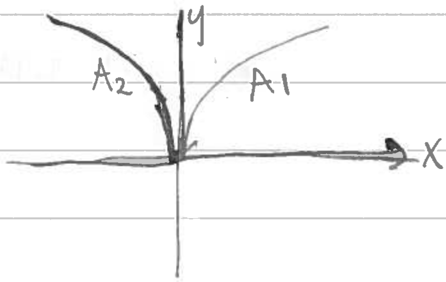
Altså er M heller ikkje ein immersert undermangfoldighet.

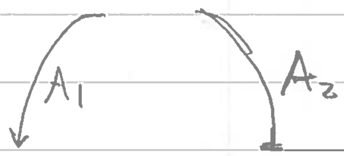
Merk. Hvis vi diskuterer dette i kategorien av mangfoldigheter med rand (eventuelt), så kan vi sette

$$M = \mathbb{R} \underset{\text{disj}}{\cup} (0,1] \quad \text{(2 komponentar, der } (0,1] \text{ har punktet } \{1\} \text{ som rand)}$$

Definer $\phi : \mathbb{R} \cup (0,1] \longrightarrow A_1 \cup A_2 \subset \mathbb{R}^2$

der $\left.\begin{array}{l} \mathbb{R} \xrightarrow{\approx} A_1 \subset \mathbb{R}^2 \\ (0,1] \xrightarrow{\approx} A_2 \subset \mathbb{R}^2 \end{array}\right\}$ legge diffeomorfiar





$$M = \mathbb{R} \underset{\text{disj}}{\cup} (0,1] \xrightarrow[\text{diffeo}]{\phi} A_1 \underset{\text{disj}}{\cup} A_2 = A \xhookrightarrow[\text{glatt}]{} \mathbb{R}^2$$

~~Merk~~ A er ikkje ein innbedda undermangfoldighet av $\mathbb{R}^2$, men A er ein immersert undermangf. med 2 komponentar, der den eine har rand $\neq \emptyset$.

$\left(M \overset{\text{diffeo}}{\approx} A \right)$