Øving 8

(Lee s.123 ; 5-1, 5-7, 5-10)

5-1 $\phi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,s,t) \to (x^2+y, x^2+y^2+s^2+t^2+y)$

$$D\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x}, \frac{\partial\phi_1}{\partial y}, \frac{\partial\phi_1}{\partial s}, \frac{\partial\phi_1}{\partial t} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial x}, \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 1 & 0 & 0 \\ 2x & 2y+1 & 2s & 2t \end{bmatrix}$$

Kritisk punkt når $\text{rang}(D\phi) < 2$.

~~Set~~ $M^2 = \phi^{-1}(0,1) \subset \mathbb{R}^4$; $M^2 = \begin{cases} x^2+y = 0 \\ x^2+y^2+s^2+t^2+y = 1 \end{cases}$

La $p = (x,y,s,t) \in M^2$. Hvis $x=0$, så $y=0$ og $s^2+t^2=1$. Lett å sjå at $\text{rang}(D\phi)=2$. Hvis $x \neq 0$, så $\text{rang}(D\phi)=2$ hvis s eller $t \neq 0$. Men hvis $s=t=0$ så er

$$\det\begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 2x & 2y+1 \end{pmatrix} = 4xy \neq 0 \implies \text{rang}(D\phi) = 2$$

Alle punkt på M^2 er difor regulære for ϕ, og M^2 er ein 2-dim glatt undermangfaldighet av $\mathbb{R}^4$. Den er imbedda (regulær), og er kompakt (lukka og begrensa i $\mathbb{R}^4$).

Påstand $M^2 \approx S^2$ (diffeo.)

Skriv $w = x^2+y$. Har C^∞ diffeomorfi $F: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$
$$(x,y,s,t) \to (x, w, s, t)$$

og
$$\underset{M^2}{\overset{\shortparallel}{F(M^2)}} = \begin{cases} w = 0 \\ x^4+s^2+t^2 = 1 \end{cases} \overset{?}{\approx} \begin{cases} w = 0 \\ x^2+s^2+t^2=1 \end{cases} = S^2$$

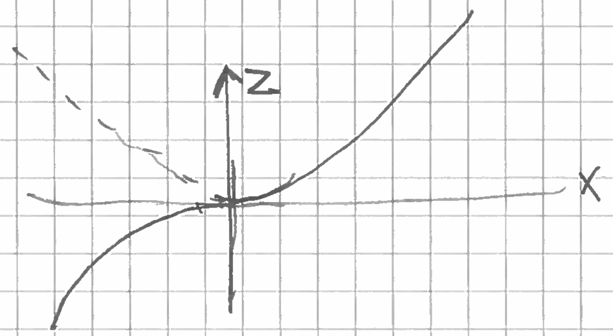
Problem: Er $x^4+s^2+t^2=0$ C^∞-diffeo med S^2?

5-1 forts Vi har altså ein 2-dim glatt undermangfoldighet

$$\overline{M}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4(x,w,s,t)$$

$$\overline{M}^2 = \left\{ \begin{array}{l} w=0 \\ x^4+s^2+t^2=1 \end{array} \right\}$$

Set $z = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x<0 \end{cases}$



$z=f(x)$ er C^1-glatt,

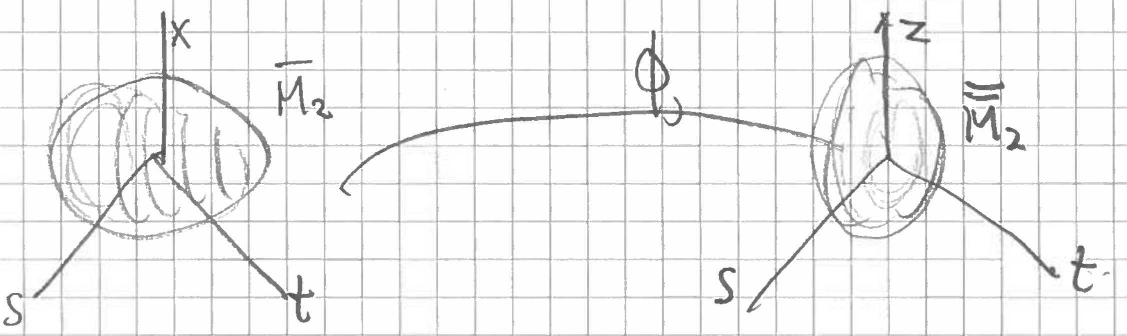
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er homeomorfi (men f^{-1} er ikkje C^1-glatt)

Definer homeo

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^3$$

$$(x,s,t) \longmapsto (z,s,t) = (f(x),s,t)$$

La $\overline{\overline{M}}^2 = \phi(\overline{M}^2)$ vere bildet av $\overline{M}_2$.



$$\overline{M}_2 : x^4+s^2+t^2=1 \longrightarrow \overline{\overline{M}}_2 : z^2+s^2+t^2=1$$

Men $\overline{M}_2$ er opplagt lik S^2, så $\overline{M}_2$ er iallfall homeomorf med S^2, og difor er også M^2 homeomorf med S^2. Sidan M^2 er ein glatt mfd, så er M^2 diffeomorf med S^2. Det er velkjent(!) at S^2 berre har ein diff. struktur (opp til ekv.

5-7 $\quad \mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}, \quad (x,y) \longrightarrow x^3 + xy + y^3$

Kritiske punkt: $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad \begin{bmatrix} 3x^2 + y = 0 \\ 3y^2 + x = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = y = 0 \\ \text{eller} \\ x = y = -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

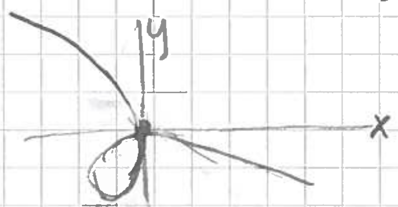
Kritiske verdiar: $F(0,0) = 0$

$F(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = 1/27$

Alle kurver $x^3 + xy + y^3 = a$, $a \neq 0, 1/27$, er glatte regulære undermangfoldigheter av $\mathbb{R}^2$, sjå plott nedanfor.

Kva kan vi seie om $x^3 + xy + y^3 = \begin{Bmatrix} 0 \text{ eller} \\ 1/27 \end{Bmatrix}$?

a) $x^3 + xy + y^3 = 0$



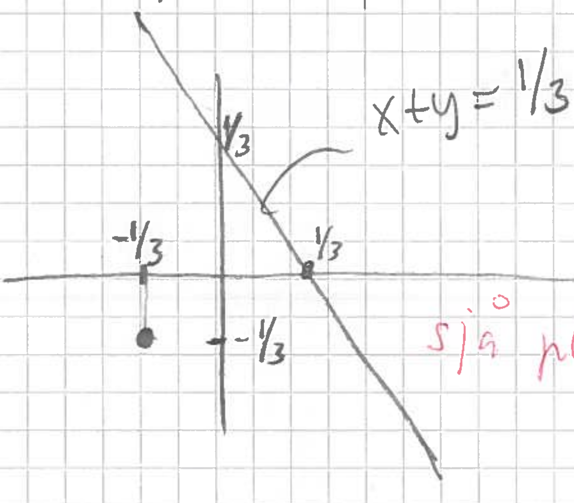
sjå plott.

Origo er singulært, kurva er ikkje ein immersert undermangfoldig, er ikkje eingong lokalt euklidsk!

b) $x^3 + xy + y^3 = 1/27$

$\Uparrow$ hint. Rekn ut $(x+y)^3$

$\begin{Bmatrix} x + y = 1/3 \\ \text{eller} \\ (x = y = -1/3) \end{Bmatrix}$



sjå plott

Så vi har ein regulær undermangfoldig med 2 komponentar: ei rett line og eit punkt.

Så sjølv om 1/27 er ein kritisk verdi, så kan nivåflata ha komponentar som er regulære undermangf.

I dette tilfelle av dimensjon 0 og 1.

5-10 $\quad M_a \subset \mathbb{R}^2 \;:\; y^2 = x(x-1)(x-a) \quad$ (elliptisk kurve)

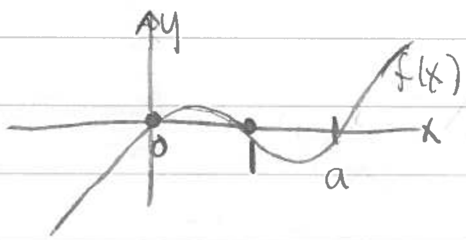
For kva verdiar av a er M_a ein imbedda undermangfoldighet av $\mathbb{R}^2$, eller ein immersert undermfd.

Definer

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}, \quad (x,y) \to x(x-1)(x-a) - y^2$$

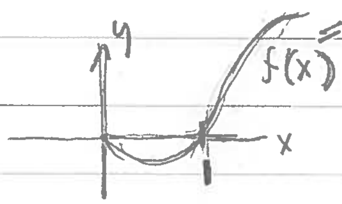
(x,y) er regulært punkt $\Longleftrightarrow \left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right] \neq 0$

dvs. hvis $\nabla F \neq 0$. Har $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y$, så alle (x,y) med $y \neq 0$ er regulære punkt. På x-aksen er punktet $(x_0, 0)$ regulært $\Longleftrightarrow \frac{d}{dx}\Big|_{x_0} (x(x-1)(x-a)) \neq 0$

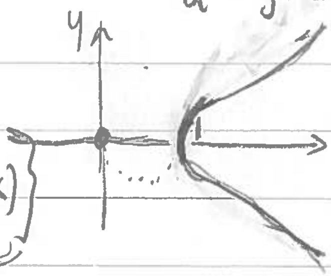


$f(x) = x(x-1)(x-a)$ er eit 3.grads polynom med røter $x = 0, 1, a$, og $f'(x) = 0$ for $x \in \{0, 1, a\}$ hvis og berre hvis $a = 0, 1$, dvs. der $f(x)$ har ei dobbelrot.

1) $a = 0$



$M_a : y = \pm\sqrt{f(x)}$



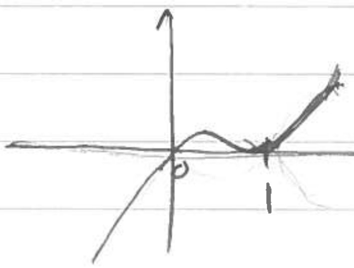
$M_a = \{\text{origo}\} \cup \underbrace{\{(x,y);\, x \geq 1,\, y^2 = f(x)\}}$

isolert punkt

dette er ei kurve som er ei (regulær) imbedding av $\mathbb{R}$

Så platt.

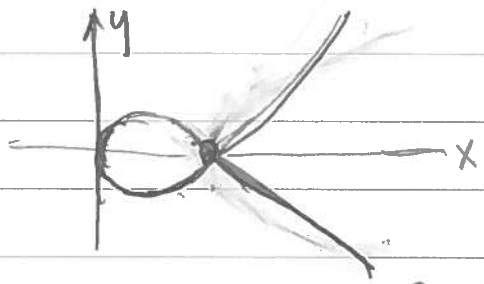
2) $a = 1$



$f(x) = x(x-1)^2$

M_a: $y^2 = x(x-1)^2$, må ha $x \geq 0$

dvs. $y = \pm\sqrt{x(x-1)^2}$



Sjå plott

M_a er ein immersjon av $\mathbb{R}$ inn i $\mathbb{R}^2$, men ikkje imbedding, fordi $(1,0)$ er sing. punkt, men elles er kurva glatt.

I følge definisjonen er ikkje M_a ein immersert undermangfoldighet, er ikkje eingong ein topologisk mangfoldighet p.g.a. skjeringspunktet. Men merk at det er sikkert mulig å parametrisere M_a $(a=1)$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} M_a \subset \mathbb{R}^2$$

der γ er glatt og $\gamma'(t) \neq 0$ overalt, altså er γ ein immersjon av $\mathbb{R}$. Men γ er ikkje globalt injektiv og kan difor ikkje vere ein immersert undermangf. av $\mathbb{R}$.

Konklusjon Berre for $a=1$ blir M_a singulær. For alle andre $a \in \mathbb{R}$ er M_a ein imbedda undermangfoldighet av $\mathbb{R}^2$. Den har 2 samanhengskomponentar, den eine er eit isolert punkt når $a=0$.

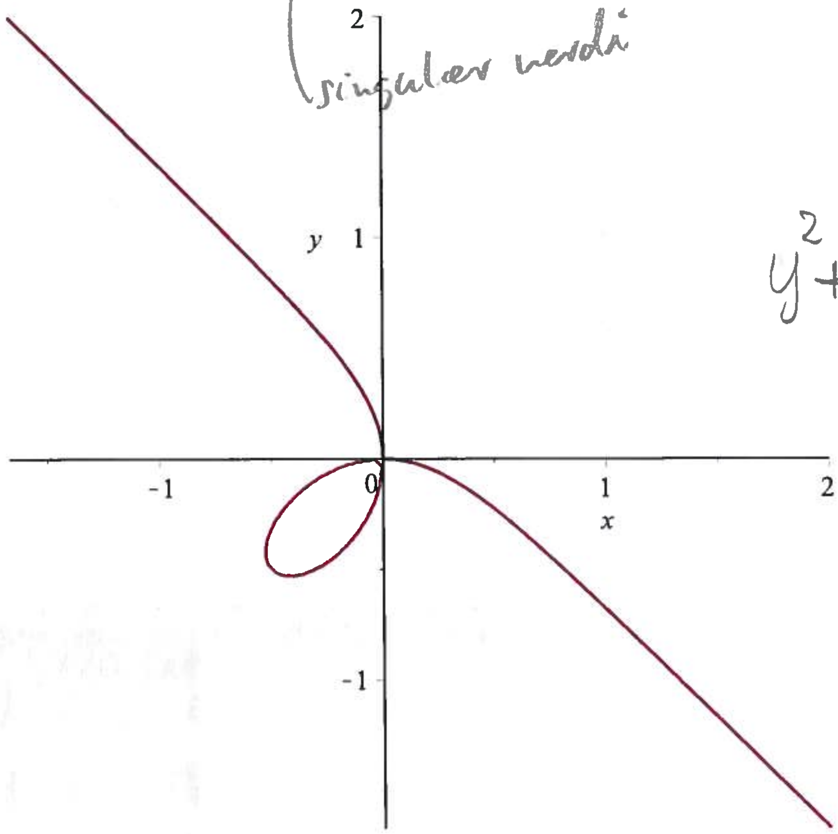
with(*plots*, *implicitplot*);

[*implicitplot*] **(1)**

Oppgåve 5-7

implicitplot($y^3 + x \cdot y + x^3 = 0$, $x = -2 .. 2$, $y = -2 .. 2$, *gridrefine* = 2);

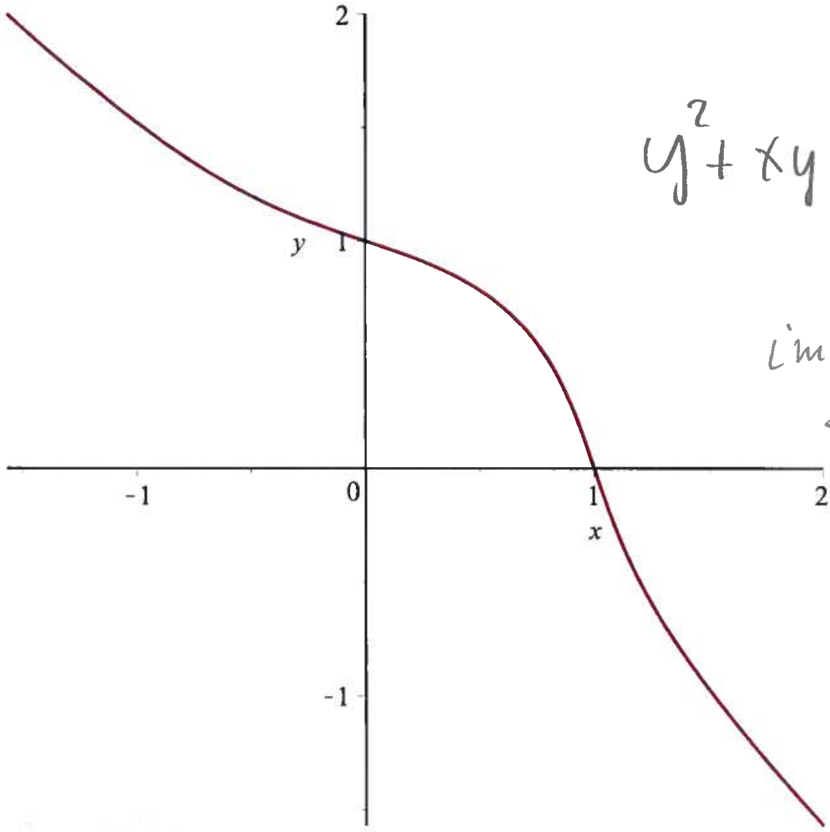
singulær verdi



$$y^2 + xy + x^3 = 0$$

ikkje immersert undermangfoldighet

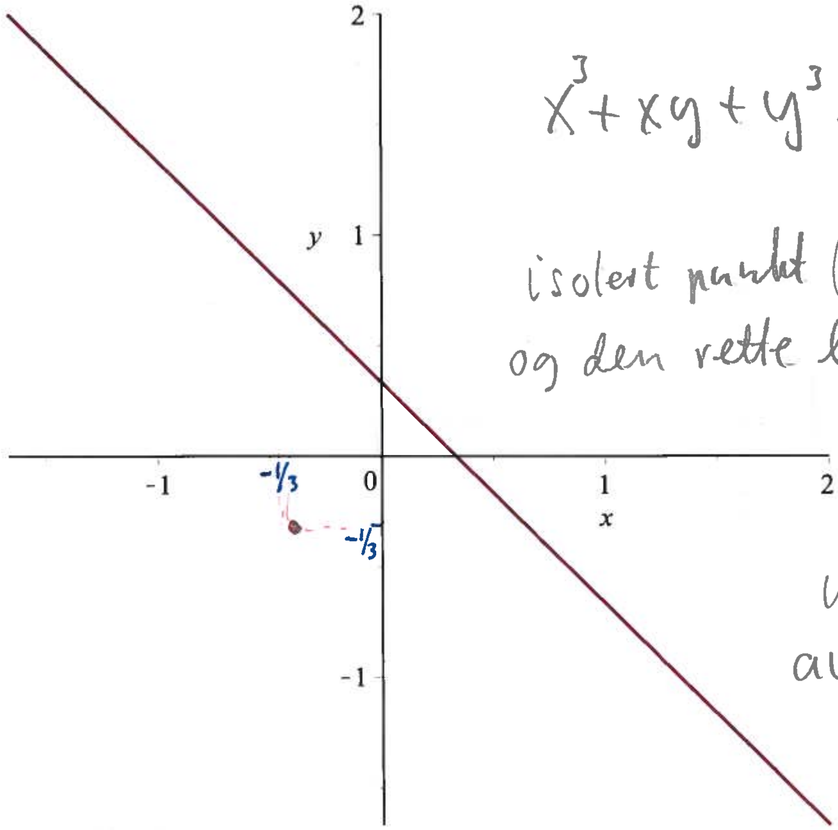
implicitplot($y^3 + x \cdot y + x^3 = 1$, $x = -2 .. 2$, $y = -2 .. 2$, *gridrefine* = 2);



$$y^2 + xy + x^3 = 1$$ regulær verdi

imbedda undermfd som er $\approx \mathbb{R}$

$implicitplot\left(y^3 + x \cdot y + x^3 = \frac{1}{27}, x = -2..2, y = -2..2, gridrefine = 3\right);$



$x^3 + xy + y^3 = \frac{1}{27}$ = singulær verdi

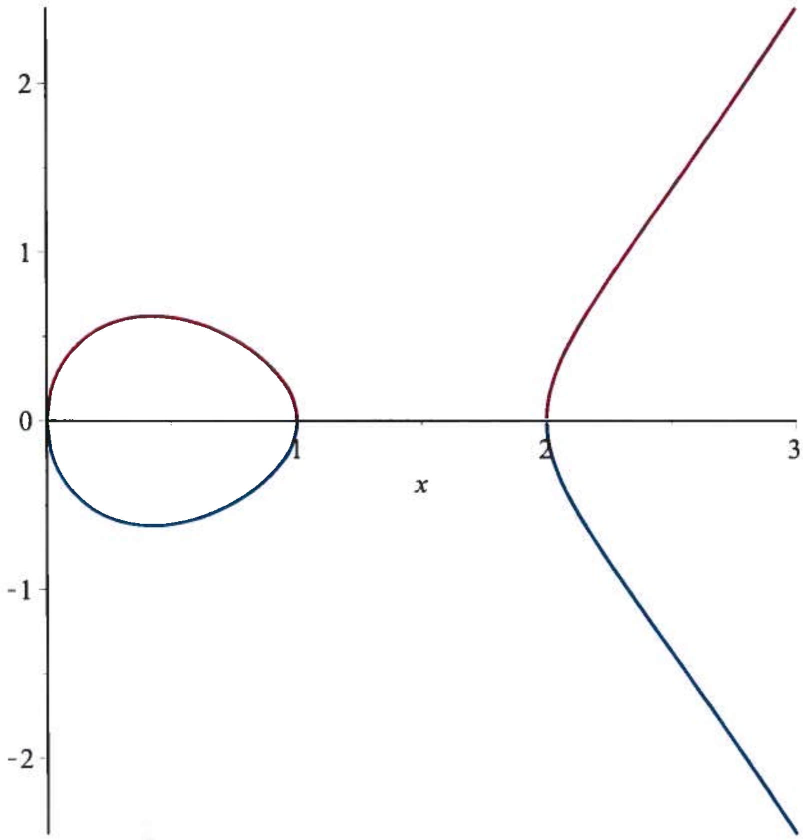
isolert punkt $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ og den rette line $x+y = \frac{1}{3}$. Begge to er faktisk imbedda undermangfoldigheter, av dim 0, 1 hhv.

MERK. Dette er den rette line x+ y = 1/3, fordi då er (x+y)^3 =

$y^3 + 3(x^2 \cdot y + xy^2) + y^3 = \frac{1}{27} = y^3 + xy + x^3$

;

$implicitplot(y^3 + x \cdot y + x^3 = -5, x = -10..10, y = -10..10, gridrefine = 2)$



$\underline{a=2}$, $\quad y^2 = x(x-1)(x-2)$

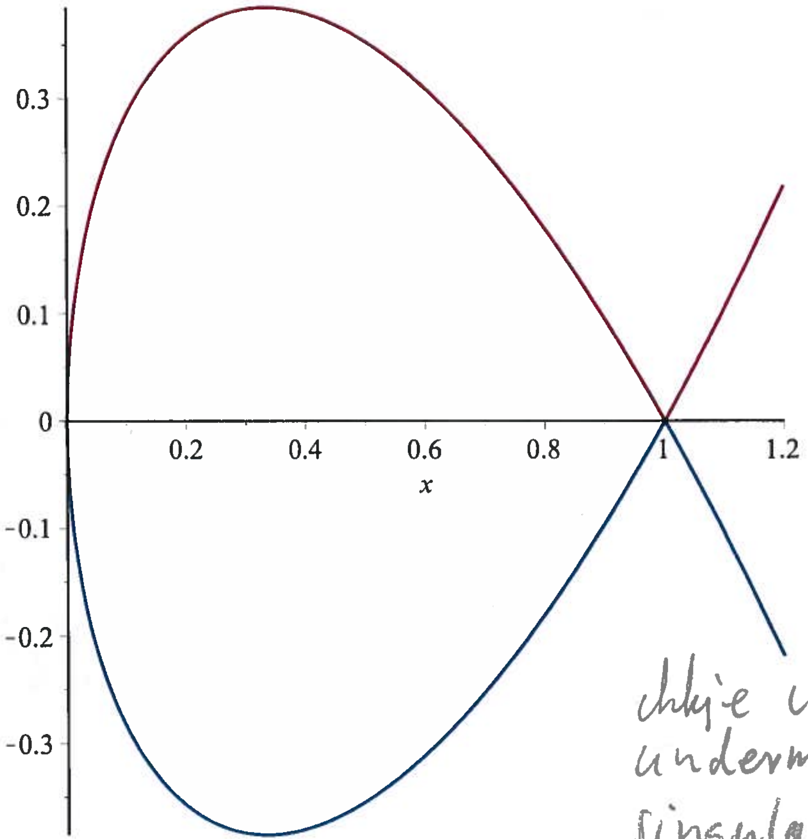
regulær undermangfoldighet av $\mathbb{R}^2$
med 2 komponenter:

$$M^2 \cong S^1 \cup \mathbb{R} \text{ (disj.)}.$$

with(*plots*);

[*animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot*] **(1)**

plot([sqrt$(x\cdot(x-1)^2)$, -sqrt$(x\cdot(x-1)^2)$], $x=0\,..1.2$);

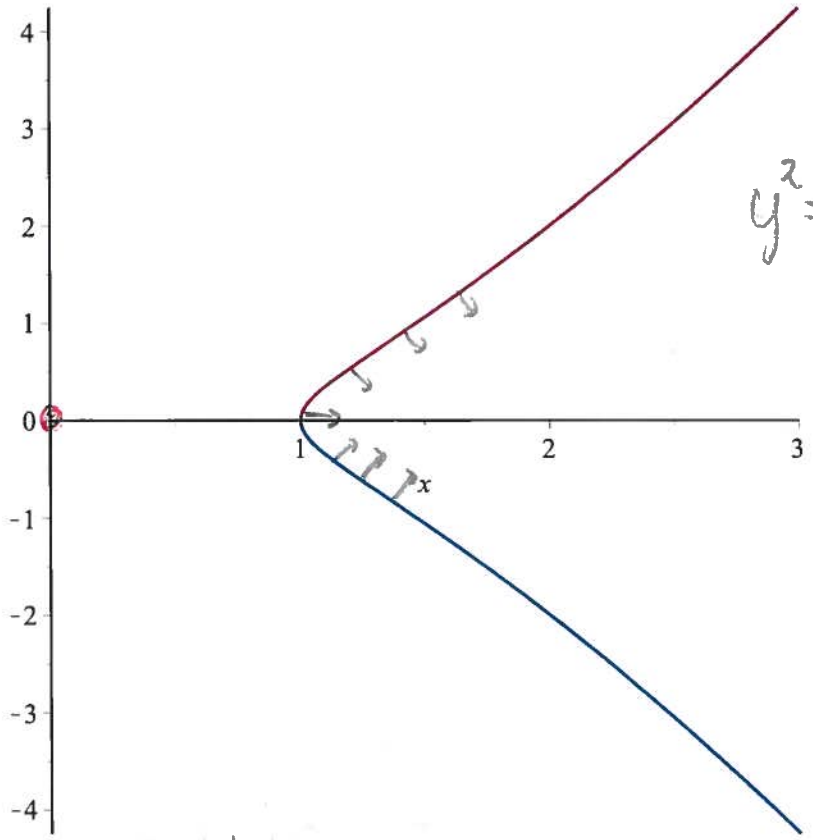


$\underline{a=1}$

$y^2 = x(x-1)^2$

ikkje immersert undermangf. p.g.a singularitet i $(1,0)$.

plot([sqrt$(x^2\cdot(x-1))$, -sqrt$(x^2\cdot(x-1))$], $x=1\,..1.2$);



$\underline{a = 0}$

$y^2 = x^2(x-1)$

kurva splittar opp i 2 komponentar
eit isolert punkt $(0,0)$ og ei kurve
gjennom $(1,0)$ som er ein imbedda
undermangf. $\approx \mathbb{R}$.

<u>Merk</u> Punktet $(1,0)$ er ikkje singulært. F.eks. er gradienten til funksjonen $x^2(x-1)-y^2$ i $(1,0)$ lik $\vec{i} = \frac{\partial}{\partial x}$

Men origo $(0,0)$ ligg også på nivåkurva $x^2(x-1)-y^2 = 0$ og er eit singulært punkt (her er gradienten lik 0), slik at 0 blir ein <u>singulær verdi</u> for $F(x,y) = x^2(x-1)-y^2$