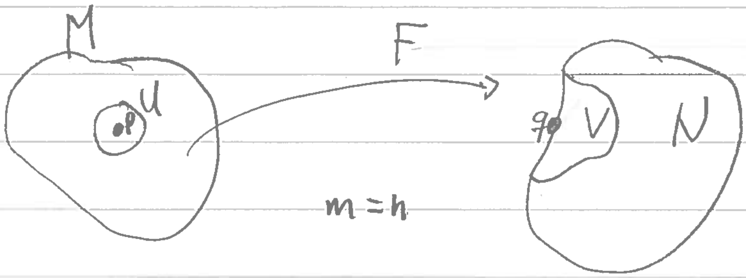
Øving 7.

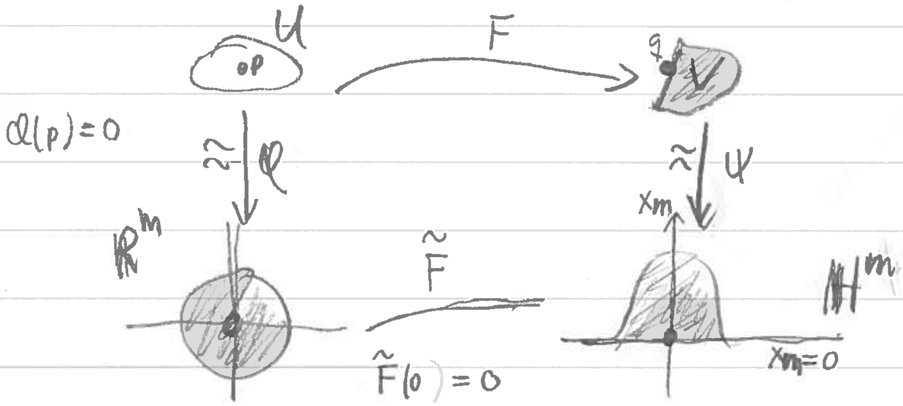
Lee (s. 96 : 4-2, 4-5, 4-6, 4-8)

4-2



$q = F(p)$

Anta $q = F(p)$ ikkje er eit indre punkt, dvs. $q \in \partial N$.
La (U, φ), (V, ψ) vere kart omkring p og q.



Anta $\psi(q) = 0$

$x_m \geq 0$ på V

$dF_p : T_pM \to T_qN$ er ein isomorfi, pr. antakelse. Difor er også $d\tilde{F}_0 : \mathbb{R}^m \to T_0\mathbb{H}^m \cong \mathbb{R}^m$ lineær isomorfi.
Vi kan også anta at $F(U) \subset V$, slik at $\tilde{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ er definert på heile den opne mengda $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$,

$$\tilde{F} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad \tilde{F}(0) = 0$$

Men sidan $\psi(V) \subset \mathbb{H}^m$ er $x_m \geq 0$ på $\psi(V)$, altså

$$\tilde{F} = (\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \dots \tilde{F}_m), \quad \tilde{F}_m \geq 0 \text{ på } \varphi(U)$$
$$\text{og } \tilde{F}_m(0) = 0$$

Iflg. inverse funksjonsteorem er $\tilde{F}$ ein diffeomorfi av ei open omegn av $0 \in \varphi(U)$ til ei open omegn av $0 \in \mathbb{R}^m$. Men det er umulig hvis $\tilde{F}_m \geq 0$.

4-5 (a) Vise at $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ er ein surjektiv og glatt submersjon.

π er surjektiv pr. def. av $\mathbb{C}P^n$ (som kvotientrom). π er også glatt pr. def. av atlaset vi har gitt $\mathbb{C}P^n$:

$$\mathcal{A} = \{(U_1,\varphi_1), \dots (U_{n+1},\varphi_{n+1})\} \qquad U_i \subset \mathbb{C}P^n$$

$$U_i = \{[z_1, z_2, \dots z_{n+1}],\ z_i \neq 0\} \xrightarrow[\approx]{\varphi_i} \mathbb{C}^n$$

$$\varphi_i : [z_1, \dots, z_{n+1}] = \left[\frac{z_1}{z_i}, \frac{z_2}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, 1, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots\right] \longrightarrow \left(\frac{z_1}{z_i}, \frac{z_2}{z_i}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_i}\right)$$

La $p \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_{n+1})$, $p_i \neq 0$,

Då er $p \in \tilde{U}_i = \{(z_1, z_2, \dots z_{n+1});\ z_i \neq 0\} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$

$$\left.\begin{array}{ll} \tilde{U}_i & (z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) \\ \approx \big\downarrow \phi_i & \quad\big\downarrow \\ \mathbb{C}^{n+1} \supset \tilde{V}_i & \left(\frac{z_1}{z_i}, \frac{z_2}{z_i}, \dots, z_i, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_i}\right) \end{array}\right\}$$ dette er eit kart for $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ omkring p!

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{n+1} \supset \tilde{U}_i \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\approx\ \phi_i"'] & U_i \subset \mathbb{C}P^n \arrow[d, "\approx\ \varphi_i"] \\
\mathbb{C}^{n+1} \supset \tilde{V}_i \arrow[r, "\tilde{\pi} = \varphi_i \circ \pi \circ \phi_i^{-1}"] & V_i = \mathbb{C}^n
\end{tikzcd}$$

Med karta $(\tilde{U}_i, \phi_i)$, (U_i, φ_i) på $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ og $\mathbb{C}P^n$ vil altså π bli representert som

$$\tilde{\pi} : (w_1, w_2, \dots w_i, \dots, w_{n+1}) \longrightarrow (w_1, w_2, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots w_{n+1})$$

dvs. projeksjon $\mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ (fjernar w_i!)

(b) $\mathbb{C}P^1$ er diffeomorf med S^2.

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^2 &\xrightarrow{\quad h \quad} \mathbb{C}\times\mathbb{R}\\ (z_1,z_2) &\longmapsto (2z_1\bar{z}_2,\ |z_1|^2-|z_2|^2)\end{aligned}$$ (Hopf avbildn.)

Restriksjon av h til $S^3 = (|z_1|^2+|z_2|^2=1)$ gir

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \xrightarrow{\quad h \quad} & S^2 \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{C}^2=\mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3=\mathbb{C}\times\mathbb{R} \end{array}$$

Merk at $|2z_1\bar{z}_2|^2 + (|z_1|^2-|z_2|^2)^2 = (|z_1|^2+|z_2|^2)^2$

Som viser at h avbildar $S^3(1)$ inn i $S^2(1)$. (radius 1)
Du kan også sjekke at h er surjektiv på S^2.

Sjå på

$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi"'] & S^2 \\ \mathbb{C}P^1 \arrow[ur, dashed, "\bar{h}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (z_1,z_2) \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & h(z_1,z_2) \\ {[z_1,z_2]} \arrow[ur, "\bar{h}"'] & \end{tikzcd}$$

Sidan $h(e^{i\theta}z_1, e^{i\theta}z_2) = h(z_1,z_2)$, er $h(z_1,z_2)$ bestemt av $[z_1,z_2] \in \mathbb{C}P^1$, så det gir oss funksjonen $\bar{h}$.
Fordi $\mathbb{C}P^1$ har kvotienttopologien for π er også $\bar{h}$ kontinuerleg.

Lemma $\bar{h}$ er injektiv.

Bevis Anta $\bar{h}[z_1,z_2] = \bar{h}[w_1,w_2]$, dvs.

$$(2z_1\bar{z}_2,\ |z_1|^2-|z_2|^2) = (2w_1\bar{w}_2,\ |w_1|^2-|w_2|^2)$$

La oss anta $w_1\neq 0$, $w_2\neq 0$, dvs. $[w_1,w_2] \neq [1,0]$ og $[0,1]$,
(desse spesialtilfella er enkle å drøfte, uansett)

Skriv $\frac{z_1}{w_1} = a$, $\frac{z_2}{w_2} = b$,

$$z_1\bar{z}_2 = w_1\bar{w}_2 \Rightarrow \frac{z_1}{w_1} = \overline{\left(\frac{w_2}{z_2}\right)} \Rightarrow a\bar{b} = 1$$

Vidare er $|z_1|^2 - |z_2|^2 = |a|^2|w_1|^2 - |b|^2|w_2|^2 = |w_1|^2 - |w_2|^2$

$$(|a|^2-1)|w_1|^2 = (|b|^2-1)|w_2|^2 = \left(\frac{1}{|a|^2}-1\right)|w_2|^2$$

$$|a|^2(|a|^2-1)|w_1|^2 = (1-|a|^2)|w_2|^2$$

Alle tal her er positive, bortsett frå $|a|^2-1$ eller $1-|a|^2$, så vi må ha $|a|^2 = 1$,

men $a = e^{i\theta} \Rightarrow b = e^{i\theta} = a$

Altså er $(z_1, z_2) = (aw_1, aw_2) = a(w_1, w_2)$

$$[z_1, z_2] = [w_1, w_2]$$

Sidan $\bar{h}$ er bijektiv, kontinuerleg, og $\mathbb{CP}^1$ er kompakt, er $\bar{h}$ også ei lukka avbildning, og difor er $(\bar{h})^{-1}$ også kontinuerleg. Altså er $\bar{h}$ ein homeomorfi.

No kan vi bruke det generelle resultat for submersjonar (som du også kan sjekke, lokalt) (sjå teorem i boka):

submersion

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "F'"] & \\ N \arrow[r, "F"] & P \end{tikzcd}$$

F glatt $\Updownarrow$ F' er glatt

For vårt tilfelle

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^2-\{0\} \supset S^3 \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "h"] & \\ \mathbb{CP}^1 \arrow[r, "\bar{h}"] & S^2 \end{tikzcd}$$

h er glatt $\Downarrow$ $\bar{h}$ er glatt

Til slutt, kvifor er $\bar{h}^{-1}$ glatt?
(slik at $\bar{h}$ vil bli ein diffeomorfi!)
Her er to metodar:

1. Velg lokale koord. og kart på $\mathbb{C}P^1$ og S^2 og vis at $\bar{h}$ er (lokal) diffeomorfi

$$\begin{tikzcd} U_1 \subset \mathbb{C}P^1 \arrow[r, "\bar{h}"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & V = S^2 - \{N\} \subset S^2 \arrow[d, "\approx"', "\text{stereografisk projeksjon}"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "\approx\ \bar{\bar{h}}"] & \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

2. Vis at $S^3 \xrightarrow{h} S^2$ har rang 2 overalt, eventuelt vis at (ved hjelp av kart, som ovanfor) at $\bar{h}$ har rang 2 overalt.

$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi"'] & S^2 \\ \mathbb{C}P^1 \arrow[ur, "\bar{h}"'] & \end{tikzcd}$$

Hvis h har rang 2 overalt, så må også $\bar{h}$ ha rang 2 overalt.

Sidan $\bar{h}$ har rang 2 overalt, følger det av inverse funksjonsteorem at $\bar{h}$ er ein <u>lokal</u> diffeomorfi. Sidan $\bar{h}$ allereie er ein homeomorfi er den også ein <u>global</u> diffeomorfi.

<u>Problem (nøtt)</u> Finn eksplisitt uttrykk for

$$(\bar{h})^{-1} : S^2 \xrightarrow{\approx} \mathbb{C}P^1 \quad \left(\text{der } \bar{h}([z_1, z_2]) = (2z_1\bar{z}_2, |z_1|^2 - |z_2|^2) \in S^2\right)$$

4-6 M kompakt. Vis at det er ingen glatt submersjon $M \xrightarrow{F} \mathbb{R}^k$, $k>0$, dvs. $\text{rang}(F) = k$ overalt

Lokalt, så ser ein submersjon ut som ein projeksjon $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$,
Sidan M er kompakt, er $F(M) \subset \mathbb{R}^k$ kompakt.
og hvis $(y_1, y_2, \dots, y_k)$ er koordinatar i $\mathbb{R}^k$, så vil alle koord. funksjonar y_i ha eit maksimum.

La $p \in M$, $F(p) = (q_1, q_2, \dots, q_k)$, q_1 maksimal y_1-verdi for F
Velg lokale koord $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ omkring p,

$$\tilde{F} : (x_1, x_2, \dots, x_m) \longrightarrow (y_1, y_2, \dots, y_k)$$

Jacobimatrise, $D(\tilde{F}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ - & - & - \\ \frac{\partial y_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_k}{\partial x_m} \end{pmatrix}$

Men $D(\tilde{F})_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots 0 \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}$, fordi $\frac{\partial y_1}{\partial x_j}(p) = 0, \forall j$
p.g.a y_1 har maksimum

og denne har ikkje rang $= k$,
difor har vi ikkje submersjon!

4-8 $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}$, $(x,y) \to xy$
Denne er opplagt glatt og surjektiv. Men den er ikkje ein submersjon, sidan
$$D\pi = (y, x) = (0,0) \quad \text{når } (x,y) = (0,0)$$
Likevel vise at

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "F\circ\pi"] & \\ \mathbb{R} \arrow[r, "F"] & P \end{tikzcd}$$

F glatt $\Longleftrightarrow$ $F \circ \pi$ glatt.

<u>Bevis for påstanden:</u>

Vi treng berre å vise at $F \circ \pi$ glatt $\Rightarrow$ F glatt
(den andre veg er opplagt!)

Definer funksjonen $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \longrightarrow (x,1)$ denne er glatt

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{R} \arrow[u, bend left, "\sigma"] \end{tikzcd}$$

$\pi \circ \sigma = Id_{\mathbb{R}}$, [$\sigma$ er ein <u>seksjon</u> for π].

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "F \circ \pi"] & \\ \mathbb{R} \arrow[u, bend left, "\sigma"] \arrow[r, "F"'] & P \end{tikzcd}$$

$$F = (F \circ \pi) \circ \sigma = F \circ (\pi \circ \sigma) = F$$

sidan $F \circ \pi$ og σ er glatte, er også F glatt!